Corrigé du TP 12 Schémas numériques de résolution d'équations différentielles

Chenevois-Jouhet-Junier

1 Imports de bibliothèques et réglage du répertoire de travail

- On va utiliser les bibliothéques/modules suivant(e)s :

```
#imports pour tout le TP
import os.path
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
```

- Toutes les figures seront rangées dans un répertoire `jolis-dessins` situé dans le répertoire de travail `TP12` contenant le script. Avec `Pyzo`, il faut régler le répertoire de travail (point de départ du chemin relatif des ressources externes) en exécutant le script avec l'option `Run as script` ou la séquence de touches `CTRL + SHIFT + E`.

```
REPERTOIRE = 'jolis-dessins' #nom du répertoire de stockage des jolis dessins
```

- On peut vérifier la valeur du répertoire de travail avec la fonction `pwd` si l'interpréteur est Ipython.

```
"""
Running script: "/home/fjunier/InfoPCSI/843/TP843/12-euler-rk4/2015-2016/corrige-tp12-euler-rk4-201-20

In [1]: pwd
Out[1]: '/home/fjunier/InfoPCSI/843/TP843/12-euler-rk4/2015-2016'
"""
```

2 Rappel sur le schéma numérique d'Euler (ordre 1)

```
def euler(F, a, y0, b, n):
    """Retourne le tableau des approximations
    de y'=F(t,y) avec y(a)=y0 par la methode d'Euler avec un pas  de 1/n
    """
```

```
    les_yk = [y0]          # la liste des valeurs calculées
    t = a                 # le temps du dernier calcul
    h = float(b-a) / n  # le pas
    dernier = y0          # la dernière valeur calculée
    for i in range(n):
        suivant = dernier + h*F(dernier, t) # le nouveau terme
        les_yk.append(suivant)  # on le place à la fin des valeurs calculées
        t = t+h                 # le nouveau temps
        dernier = suivant       # et on met à jour le dernier terme calculé
    return les_yk  # c'est fini


"""
In [6]: euler(lambda y, t : y, 0, 1, 1, 10)
Out[6]:
[1,1.1,1.2100000000000002,1.3310000000000002,1.4641000000000002,1.61051,
 1.7715610000000002,1.9487171,2.1435888100000002,2.357947691,2.5937424601]
"""
```

3 Exercice 1 Schéma numérique de Heun (ordre 2)

```
def heun(F, a, y0, b, n):
    """Retourne le tableau des approximations
    de y'=F(t,y) avec y(a)=y0 par la methode de Heun avec un pas  de 1/n
    """
    les_yk = [y0]          #la liste des valeurs calculées
    t = a                 #le temps du dernier calcul
    h = float(b-a) / n  #le pas
    dernier = y0          # la dernière valeur calculée
    for i in range(n):
        eul = dernier + h*F(dernier, t) # ce que propose Euler
        suivant = dernier + h/2*(F(dernier, t) + F(eul, t+h)) #nouveau terme
        les_yk.append(suivant)  #on le place à la fin des valeurs calculées
        t = t+h                 #nouveau temps
        dernier = suivant       #on met à jour le dernier terme calculé
    return les_yk


def f1(z, t):
    return z

"""
In [8]: heun(f1, 0, 1, 1, 2)
Out[8]: [1, 1.625, 2.640625]
"""
```

#Exercice 2 Schéma numérique de Runge-Kutta (ordre 4)

```
def RK4(F, a, y0, b, n):
    """Retourne le tableau des approximations
    de y'=F(t,y) avec y(a)=y0 par la methode de RK4 avec un pas  de 1/n
```

```
    """
    les_yk = [y0]          # la liste des valeurs calculées
    t = a                  # le temps du dernier calcul
    h = float(b-a) / n  # le pas
    dernier = y0           # la dernière valeur calculée
    for i in range(n):
        alpha = dernier + h/2*F(dernier, t)
        beta = dernier + h/2*F(alpha, t+h/2)
        gamma = dernier + h*F(beta, t+h/2)
        suivant = dernier + h/6*(F(dernier, t) + 2*F(alpha, t+h/2) +
                        2*F(beta, t+h/2) + F(gamma,t+h)) # le nouveau terme
        les_yk.append(suivant)  # on le place à la fin des valeurs calculées
        t = t+h                 # le nouveau temps
        dernier = suivant       # et on met à jour le dernier terme calculé
    return les_yk


"""
In [10]: RK4(f1, 0, 1, 1, 2)
Out[10]: [1, 1.6484375, 2.71734619140625]
"""
```

4 Exercice 3 Comparaison des quatre schémas numériques pour la résolution approchée de $y' = y$ avec $y(0) = 1$

```
def exo3():
    """Comparaison des méthodes Euler, Heun, RK4, odeint (pas variable)
    sur le problème de Cauchy y'=y avec y(0)=1 pour n=4, n=10, n=100, n=1000"""
    e = np.exp(1)
    print("exp(1)=%.15f"%e)
    #500 temps pour représenter la fonction exponentielle sur les graphiques
    tcontinu = np.linspace(0, 1, 500)
    #y exact (ou presque)
    yexpo = np.exp(tcontinu)
    #comparaison numérique pour 10, 100, 1000 temps
    for n in [4, 10, 100, 1000]:
        t = np.linspace(0,1,n+1)
        yodeint = odeint(lambda z, t : z, 1, t)
        yeuler = euler(f1, 0, 1, 1, n)
        yheun = heun(f1, 0, 1, 1, n)
        yrk4 = RK4(f1, 0, 1, 1, n)
        eul, heu, rk4, od = [y[-1] for y in [yeuler, yheun, yrk4, yodeint]]
        print("Pour n=%i :\n\t\t%.15f\t%.15f\t%.15f\t%.15f"%(n,eul,heu,rk4,od))
        print("Erreurs absolues : \n\t\t%.15f\t%.15f\t%.15f\t%.15f\n"
              %(abs(eul-e), abs(heu-e), abs(rk4-e),abs(od-e)))
        #graphique
        plt.plot(t, yeuler,color='red', linestyle='dashed', label='Euler')
        plt.plot(t, yheun,color='navy',linestyle='dotted', label='Heun')
        plt.plot(t, yrk4,color='blue',linestyle='solid', label='RK4')
        plt.plot(t, yodeint,color='green',linestyle='dashdot', label='odeint')
        plt.plot(tcontinu, yexpo,color='black',linestyle='solid',linewidth=1.5, label='expo')
```

```
        plt.legend(loc = 'upper left')
        plt.title(r"Comparaison (avec un pas de $1/%s$) des methodes pour $y'=y$"%n)
        plt.savefig(os.path.join(REPERTOIRE,
        'comparaison-methodes-%s-pas.png'%n), dpi=80)
        #plt.show()
        plt.clf() # faire de la place pour une nouvelle figure


"""
>>> exo3()
exp(1)=2.718281828459045
Pour n=4 :
2.441406250000000   2.694855690002441   2.718209939201323   2.718281903130344
Erreurs absolues :
0.276875578459045   0.023426138456604   0.000071889257722   0.000000074671299

Pour n=10 :
2.593742460100000   2.714080846608224   2.718279744135166   2.718281900949100
Erreurs absolues :
0.124539368359045   0.004200981850821   0.000002084323879   0.000000072490055

Pour n=100 :
2.704813829421526   2.718236862559957   2.718281828234404   2.718281899096809
Erreurs absolues :
0.013467999037519   0.000044965899088   0.000000000224641   0.000000070637764

Pour n=1000 :
2.716923932235896   2.718281375751763   2.718281828459025   2.718281949830612
Erreurs absolues :
0.001357896223149   0.000000452707282   0.000000000000020   0.000000121371567
"""
```

5 Exercice 4 Passage à l'ordre 2, résolution de l'équation du pendule non amorti $y'' = -sin(y)$ avec le schéma d'Euler

On vectorialise en posant $Y(t) = (y(t), y'(t))$ et $F(Y(t), t) = (y'(t), -sin(y(t)))$

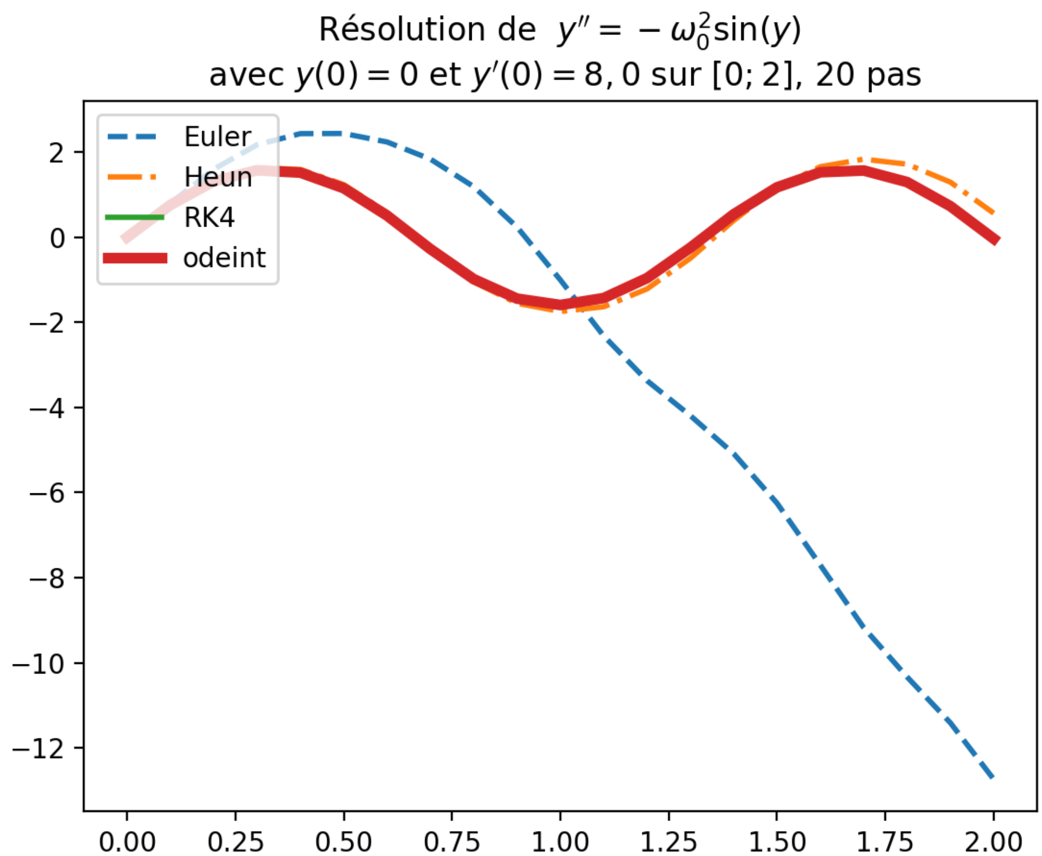
On a donc F de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $F((a, b), t) = (b, -sin(a))$.

```
def f_pendule(z, t):
    y, yp = z  #y=z[0] et yp=z[1]
    return np.array([yp, -31.36*np.sin(y)])


def exo4():
    """Fonction test de l'exo 4
    Approximation de la solution de y'' = -(omega_0)^2*sin(y) sur [0;2]
    avec y(0)=0 et y'(0)=8"""
    #Y est un tableau d'array qui sont les approximations
    #de (y,y') aux temps tk=10k/100  (0<=k<=100)
    Y = euler(f_pendule, 0, np.array([0,8]), 2, 100)
```

```
t = np.linspace(0, 2, 101)
Yarray = np.array(Y)
plt.plot(t, Yarray[:, 0]) #on extrait la première colonne de Y
plt.title(u"Résolution (Euler) de  $y''=-\omega_{0}^{2}\sin(y)$ avec \n $y(0)=0$ et $y'(0)=8,0$ su
plt.savefig(os.path.join(REPERTOIRE,'exo4-pendule-amorti.png'), dpi=200)
# plt.show()
plt.clf() # faire de la place pour une nouvelle figure
```

6 Exercice 5 Comparaison des quatre méthodes pour la résolution approchée de $y'' = -\sin(y)$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1,5$ sur $[0; 10]$




```
def exo5():
    """Fonction test de l'exo 5
    Solutions  de y'' = -(omega_0)^2*sin(y) sur [0;2]
    avec y(0)=0 et y'(0)=8
    pour n dans {20,100,1000}"""
    #Y est un tableau d'array qui sont les approximations
    #de (y,y') aux temps tk=10/k  (0<=k<=100)
    methode = [euler, heun, RK4, odeint]
    #couleur = ['red', 'blue', 'green',  'black']
    style = ['--','-.','-','-']
```

```
    width = [2, 2, 2, 4]
    etiquette = ['Euler', 'Heun', 'RK4', 'odeint']
    for n in [20, 100, 1000]:
        t = np.linspace(0, 2, n+1)
        for i in range(4):
            if i < 3:
                Y = methode[i](f_pendule, 0, np.array([0,8]), 2, n)
                Yarray = np.array(Y)
                #on extrait la première colonne de Y
                plt.plot(t, Yarray[:, 0], linestyle=style[i],
                                    linewidth=width[i], label=etiquette[i])
            else:
                Y = odeint(f_pendule, np.array([0,8]), t)
                Yarray = np.array(Y)
                #on extrait la première colonne de Y
                plt.plot(t, Yarray[:, 0], linestyle=style[i],
                                    linewidth=width[i], label=etiquette[i])
        plt.title(u"Résolution de  $y''=-\omega_{0}^{2}\sin(y)$ \n avec $y(0)=0$ et $y'(0)=8,0$ sur $
        plt.legend(loc = 'upper left')
        plt.savefig(os.path.join(REPERTOIRE,'exo5-%d-pas.png'%n), dpi=200)
        plt.clf() # faire de la place pour une nouvelle figure
```

7 Exercice 6

```
def exo6():
    """Fonction test de l'exo 6
    Solutions  de y'' = -(omega_0)^2*sin(y) sur [0;6]
    avec y(0)=0 et y'(0)=11.2
    La solution théorique est strictement croissante
    et converge vers pi
    """
    #Y est un tableau d'array qui sont les approximations
    #de (y,y') aux temps tk=10/k  (0<=k<=100)
    methode = [euler, heun, RK4, odeint]
    #couleur = ['red', 'blue', 'green',  'black']
    style = ['--','-.','-','-']
    width = [2, 2, 2, 4]
    n = 1000
    etiquette = ['Euler', 'Heun', 'RK4', 'odeint']
    t = np.linspace(0, 6, 1+n)
    for i in range(4):
        if i < 3:
            Y = methode[i](f_pendule, 0, np.array([0,11.2]), 6, n)
        else:
            Y = methode[i](f_pendule, np.array([0,11.2]), t)
        Yarray = np.array(Y) #conversion en array pour le slicing
        #on extrait la première colonne de Y
        plt.plot(t, Yarray[:, 0], linestyle=style[i],
                              linewidth=width[i], label=etiquette[i])
    plt.legend(loc = 'upper left')
```

```
    plt.title(u"Résolution de  $y''=-\omega_{0}^{2}\sin(y)$ avec \n $y(0)=0$ et $y'(0)=11.2$ sur $[0;6
    plt.savefig(os.path.join(REPERTOIRE,'exo6-pendule-limite.png'), dpi=200)
    plt.clf() # faire de la place pour une nouvelle figure
```

8 Exercice 7 Un peu de physique : Chute libre et parabole de sécurité

- On va résoudre numériquement l'équation différentielle d'ordre 2 : $\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OM(t)} = g$ où g est l'accélération de la pesanteur.
- On vectorialise en dimension 4 en résolvant :

$$Y' = F(Y,t) \text{ où } Y = (x, z, x', z') \text{ et } F(Y,t) = (x', z', x_g, z_g)$$

- Les constantes de l'accélération de la pesanteur à la surface terrestre sont environ $x_g = 0$ et $z_g = -10$ et puisque le projectile est lancé avec une vitesse v_0 constante et avec un angle α variable avec l'horizontale, les composantes de la vitesse initiale sont $(v_0 \cos(\alpha), v_0 \sin(\alpha))$.

```
g = 10. #accélération de la pesanteur

def Flibre(V, t):
    x, z, xp, zp = V
    return np.array([xp, zp, 0, -g])

def chutelibre(v0, alpha, tmax, n):
    """
    parabole approchée avec odeint
    sur l'intervalle entre 0 et tmax avec n temps
    et les conditions initiales vo et alpha
    """
    t = np.linspace(0, tmax, n+1)
    yodeint = odeint(Flibre, np.array([0, 0, v0*np.cos(alpha),
                                      v0*np.sin(alpha)]), t)
    #on ne garde que les z>=0
    #puis on convertit en array  pour le slicing
    Yodeint = np.array([y[:2] for y in yodeint if y[1] >= 0])
    plt.plot(Yodeint[:,0], Yodeint[:,1])

def exo7question3(v0, tmax, n):
    angle = np.linspace(0, np.pi/2, 50)
    for alpha in angle:
        chutelibre(v0, alpha, tmax, n)
    #tracé de la parabole de surete
    #d'équation z = v0**2/(2*g)-g/(2*v0**2)*x**2
    #elle coupe l'axe des abscisses en v0**2/g
    x=np.linspace(0,v0**2/g,100)
    plt.plot(x,v0**2/2/g-g/v0**2*x*x/2,linewidth=4,color='black')
    plt.xlabel(r'$x(t)$',fontsize=18)
    plt.ylabel(r'$z(t)$',fontsize=18)
    plt.title('Chutes libres')
    plt.savefig(os.path.join(REPERTOIRE,'exo7-libre-vitesse-%i.png'%v0), dpi=60)
    plt.clf() # faire de la place pour une nouvelle figure
```

```
"""
>>> exo7question3(10, 10, 1000)
"""
```

- On suppose maintenant que le projectile est soumis à des forces de frottement de la forme $-kv$
- On va donc résoudre numériquement $\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OM(t)} = g - k_m \times v$
- On considère :

$$Y' = F(Y,t) \text{ où } Y = (x, z, x', z') \text{ et } F(Y,t) = (x', z', -k_m \times x', -z_g - k_m \times z')$$

```
k_m = 4 #coefficient de frottement

def Famortie(V,t):
    x, z, xp, zp = V
    return np.array([xp, zp,-k_m*xp,-g-k_m*zp])

def chuteamortie(v0, alpha, tmax, n):
    t = np.linspace(0, tmax, n+1)
    yodeint = odeint(Famortie, np.array([0, 0, v0*np.cos(alpha),
                             v0*np.sin(alpha)]), t)
    #on ne garde que les z>=0
    #puis on convertit en array  pour le slicing
    Yodeint = np.array([y[:2] for y in yodeint if y[1] >= 0])
    plt.plot(Yodeint[:,0], Yodeint[:,1])

def exo7question5(v0, tmax, n):
    angle = np.linspace(0, np.pi/2, 50)
    for alpha in angle:
        chuteamortie(v0, alpha, tmax, n)
    plt.xlabel(r'$x(t)$',fontsize=18)
    plt.ylabel(r'$z(t)$',fontsize=18)
    plt.title('Chutes amorties')
    plt.savefig(os.path.join(REPERTOIRE,'exo7-amortie-vitesse-%i.png'%v0), dpi=60)
    plt.clf() # faire de la place pour une nouvelle figure


"""
>>> exo7question5(10, 10, 1000)
"""
```

9 Exercice 8 Cinétique chimique

```
def Ford(Y,t,ordre,alpha,beta):
    A, B, C = Y
    return np.array([-alpha*A**ordre, alpha*A**ordre - beta*B**ordre,
     beta*B**ordre])

def exo8(F, ordre):
    for alpha, beta in [(1, 1), (10, 1), (1, 10)]:
```

```
    Fbis = lambda Y, t : F(Y, t, ordre, alpha, beta)
    t = np.linspace(0, 6, 1000)
    yodeint = odeint(Fbis, np.array([1, 0, 0]), t)
    Yodeint = np.array(yodeint)
    plt.plot(t, Yodeint[:,0], linestyle='--') #tracé de la concentration de A
    plt.plot(t, Yodeint[:,1],linestyle='-.') #tracé de la concentration de B
    plt.plot(t, Yodeint[:,2]) #tracé de la concentration de C
    plt.title(r'Concentrations chimiques $\alpha$=%d, $\beta$=%d'%(alpha,beta))
    plt.legend(['[A]', '[B]', '[C]'], loc = 'center right')
    plt.grid(True)
    plt.savefig(os.path.join(REPERTOIRE,'exo8-ordre%d-alpha%d-beta%d.png'%(ordre,alpha,beta)))
    plt.clf() # faire de la place pour une nouvelle figure
```

10 Exercice 9 Instabilité des schémas numériques

- La solution générale de $y'' = -2y' + 3y$ est de la forme $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$. On peut le vérifier avec la fonction `sympy.dsolve` du module de calcul formel `sympy`

```
"""
In [18]: import sympy

In [19]: from sympy.abc import f, x

In [20]: diffeq = sympy.Eq(f(x).diff(x,x) + 2*f(x).diff(x) - 3*f(x),0)

In [21]: diffeq
Out[21]: -3*f(x) + 2*Derivative(f(x), x) + Derivative(f(x), x, x) == 0

In [22]: sympy.dsolve(diffeq, f(x))
Out[22]: f(x) == C1*exp(-3*x) + C2*exp(x)
"""
```

- La solution particulière pour les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -3$ est $y(x) = e^{-3x}$
- Elle vérifie pour tout réel x, $y'(x) = -3 \times e^{-3x}$ et donc $y'(x) + 3y(x) = 0$.

  C'est vrai pour $x = 0$.

  Dès les premières étapes du schéma, avec les petites approximations, cette égalité n'est plus vérifiée (les réels sont représentés de façon approchée par des flottants).

  A chaque étape on résout alors numériquement des équations différentielles vérifiant des conditions initiales légèrement différentes.

  Leurs solutions vont comporter un terme en e^x qui va diverger quand x va tendre vers $+\infty$.

```
def instable1(Y, t):
    y, yp = Y
    return np.array([yp, -2*yp + 3*y])
```

```python
def exo9(F, y0, yp0):
    methode = [euler, heun, RK4, odeint]
    if F.__name__ == "instable1":
        tmax = [37, 36, 35, 80] #tmax varie selon le schéma
    else:
        tmax = [37, 36, 35, 26]
    style = ['--','-.','-','-']
    width = [2, 2, 2, 4]
    n = 1000
    for i in range(4):
        t = np.linspace(0, tmax[i], 1+n)
        if i < 3:
            Y = methode[i](F, 0, np.array([y0, yp0]), tmax[i], n)
        else:
            Y = methode[i](F, np.array([y0, yp0]), t)
        Yarray = np.array(Y) #conversion en array pour le slicing
        #on extrait la première colonne de Y
        plt.plot(t, Yarray[:, 0], linestyle=style[i],linewidth=width[i])
    plt.legend(['Euler', 'Heun', 'RK4', 'odeint'], loc = 'upper left')
    plt.title('Une situation instable')
    plt.savefig(os.path.join(REPERTOIRE,'exo9-%s.png'%F.__name__), dpi=60)
    plt.clf() # faire de la place pour une nouvelle figure

"""
>>> exo9(instable1,1,-3)
"""
```

- On résout l'équation translatée $y'' = -2y' + 3y - 1$ en prenant comme conditions initiales $y(0) = \frac{4}{3}$ et $y'(0) = -3$
- La solution générale de cette équation est $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x} + \frac{1}{3}$.
- La solution particulière est $y(x) = e^{-3x}$.
- On observe encore une instabilité des schémas numériques de résolution.

```python
def instable2(Y, t):
    y, yp = Y
    return np.array([yp, -2*yp + 3*y - 1])


"""
>>> exo9(instable2,4/3.,-3)
"""
```

11 Exercice 10 Équation de Vanderpol $x'' = \mu \times (1 - x^2) \times x' - x$

Portrait de phase (x, x') pour la résolution numérique avec `odeint` de l'équation de Vanderpol $x'' = \mu \times (1 - x^2) \times x' - x$

```python
mu = 1

def vanderpol(X,t):
    x, xp = X
```

```
    return np.array([xp, xp*mu*(1 - x**2)-x])

def exo10():
    style = ['--','-.','-']
    width = [2, 2, 4]
    cinit = [[0, 3], [0.1, 0], [3, 0]]
    tmax = 50
    n = 1000
    for i in range(3):
        t = np.linspace(0, tmax, 1+n)
        Y = odeint(vanderpol, cinit[i], t)
        Yarray = np.array(Y) #conversion en array pour le slicing
        #on extrait la première colonne de Y
        plt.plot(Yarray[:, 0], Yarray[:, 1], linestyle=style[i],
                                                    linewidth=width[i])
    plt.axhline(color='black')
    plt.axvline(color='black')
    plt.xlabel(r'$x(t)$',fontsize=18)
    plt.ylabel(r"$x'(t)$",fontsize=18)
    plt.grid()
    plt.legend([r"$(x(0),x'(0))=(0,3)$", r"$(x(0),x'(0))=(1/10,0)$",
                r"$(x(0),x'(0))=(3,0)$"], loc = 'upper left')
    plt.savefig(os.path.join(REPERTOIRE,'exo10.png'), dpi=80)
    plt.clf() # faire de la place pour une nouvelle figure
```