Dichotomie vs. méthode de Newton

D'après un TP de Stéphane Gonnord

Buts du TP

- Mettre en œuvre la recherche dichotomique d'un zéro de fonction continue.
- Programmer la méthode de Newton et l'expérimenter.
- Visiter des méthodes périphériques.

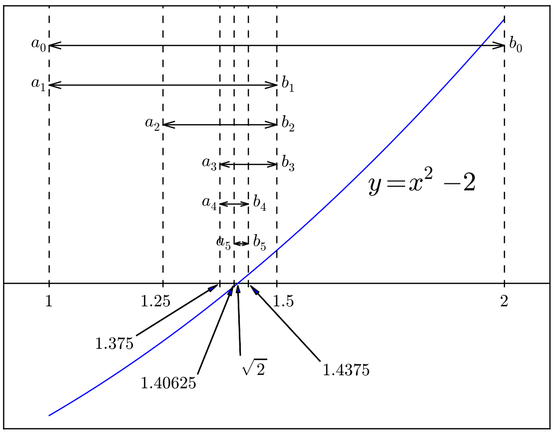
Après 50 minutes, on passera impérativement à la deuxième partie. Après 1H20 de TP, on passera impérativement à la troisième partie.

1 Recherche dichotomique d'un zéro

Rappel : on suppose qu'une fonction continue f prend des valeurs de signe (large) opposé en a et b, avec $a < b$. Le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) assure que f s'annule (au moins) une fois dans cet intervalle. Notons $m = \frac{a+b}{2}$. Si $f(a)$ et $f(m)$ sont de signe opposé, le TVI nous assure que f s'annule sur $[a, m]$, et on a ainsi réduit l'intervalle d'étude de moitié. Si $f(a)$ et $f(m)$ sont de même signe strict, alors $f(m)$ et $f(b)$ sont de signe opposé [1], et on peut cette fois continuer avec l'intervalle $[m, b]$.

En itérant le procédé, on construit une suite de segments $[a_n, b_n]$ contenant chacun un zéro [2] de f, et de taille divisée par deux à chaque étape. On démontre ainsi par récurrence qu'au bout de n itérations on a $b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$.

Le dessin qui suit montre les premières étapes de la recherche d'un zéro de $x \mapsto x^2 - 2$ sur $[0, 2]$ (bref, une évaluation de $\sqrt{2} \simeq 1,4142$!) :



Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont alors adjacentes : elles convergent vers une limite commune l vérifiant $f(l) = 0$ (grosso modo : passer l'inégalité $f(a_n) \leqslant 0 \leqslant f(b_n)$ à la limite...). Ceci conduit naturellement à l'algorithme suivant, qui nous permet d'obtenir une approximation d'un zéro de f à ε près :

Entrées : f, a, b, ε
$g, d \leftarrow a, b$ # bornes gauche et droite du segment
tant que $d - g > 2\varepsilon$ **faire**
  $m \leftarrow \frac{g+d}{2}$
  si $f(m)f(g) \leqslant 0$ **alors**
    $d \leftarrow m$ # on continue à gauche
  sinon
    $g \leftarrow m$ # on continue à droite
arrivé ici, l'intervalle est de longueur majorée par 2ε
donc chaque habitant (en particulier le zéro recherché) est à une distance au plus ε du milieu.
Résultat : $\frac{g+d}{2}$

1. Pourquoi, au fait ?
2. Et ce sera rapidement le même...

EXERCICE 1 1. *Écrire une fonction prenant en entrée une autre fonction f (supposée continue), deux réels a et b tels que $a < b$ et $f(a)f(b) \leqslant 0$, ainsi que $\varepsilon > 0$, et renvoyant r tel qu'il existe z vérifiant $f(z) = 0$ et $|r - z| \leqslant \varepsilon$.*

```
def dichotomie(f, a, b, epsilon):
    ....
```

2. *Tester la fonction* `dichotomie` *en prenant pour f la fonction $x \mapsto x^2 - 2$, $[a, b] = [1, 2]$, et différentes valeurs de ε. Expliquer ce qu'il se passe si on choisit $\varepsilon = 10^{-16}$.*

```
>>> def f0(x):
        return x**2-2
>>> dichotomie(f0, 1, 2, 0.001)
1.4150390625
```

EXERCICE 2 1. *Tester la fonction précédente en prenant pour f la fonction sinus, $[a, b] = [3, 4]$, et différentes valeurs de ε.*

```
>>> dichotomie(math.sin,3,4,0.001)
3.1416015625
```

2. *Théoriquement, quel est le nombre d'itérations prévisible pour l'appel précédent ? Rajouter un compteur à la fonction* `dichotomie` *pour le vérifier.*

3. *Modifier le code de la fonction* `dichotomie` *pour minimiser les appels à la fonction f.*

EXERCICE 3 *Soit la fonction $f : x \mapsto 10^{-8}x^2 - \frac{4}{5}x + 10^{-8}$.*

1. *Vérifier que les solutions exactes dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$ sont $x_1 = 4 \times 10^7 - \sqrt{16 \times 10^{14} - 1}$ et $x_2 = 4 \times 10^7 + \sqrt{16 \times 10^{14} - 1}$*

2. *Avec le module* `decimal` *vérifier que des valeurs approchées des solutions de l'équation $f(x) = 0$ avec 50 décimales sont :*

```
>>> from decimal import *
>>> getcontext().prec = 50
>>> x1 = 4*10**7 - Decimal(16*10**14-1).sqrt()
>>> x1
Decimal('1.2500000000000001953125000000000610E-8')
>>> x2 = 4*10**7 + Decimal(16*10**14-1).sqrt()
>>> x2
Decimal('79999999.999999987499999999999999804687499999999390')
```

3. *Écrire une une fonction* `nbiter(a, b, epsilon)` *qui retourne le nombre entier d'itérations théorique pour l'appel* `dichotomie(f, a, b, epsilon)`.

```
>>> nbiter( 0, 1, 10**(-12))
40
>>> nbiter( 7*10**7, 9*10**7, 10**(-12))
65
```

Tester la fonction `dichotomie` *pour déterminer des valeurs approchées des deux racines avec une précision de 10^{-12}. On choisira $(a, b) = (0, 1)$ pour x_1 et $(a, b) = (7 \times 10^7, 9 \times 10^7)$ pour x_2.*

4. *Si l'un des essais provoque une boucle infinie, modifier la code de la fonction* `dichotomie` *pour que le nombre d'itérations ne dépasse pas le nombre d'itérations théorique de plus de 10 % et que la fonction affiche les valeurs de* `a, b, m` *à chaque étape. Comment peut-on expliquer le problème ?*

2 Évaluation numérique d'une dérivée

Lorsqu'on connaît f par ses *valeurs* et non une *formule*, il est a priori impossible de déterminer f'. On peut cependant l'approcher : mathématiquement, on a d'une part le résultat théorique $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} f'(x_0)$, et d'autre part le résultat pratique (obtenu par exemple par inégalité de Taylor-Lagrange) lorsque f est de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de x_0 :

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right| \leqslant \frac{M_2}{2}\,|h|,$$

où M_2 est un majorant de $\left|f''\right|$ sur un intervalle contenant $[x_0, x_0+h]$.

EXERCICE 4 *Écrire une fonction prenant en entrée f, x_0, h, et renvoyant une évaluation de $f'(x_0)$ par cette formule.*

EXERCICE 5 *Tester la fonction précédente pour des valeurs de h de la forme $\left(\frac{1}{10}\right)^k$ dans les cas suivant :* sin *en* 0, exp *en* 0, cos *en* $\frac{\pi}{6}$.
Dans chaque cas, on fera apparaître la différence entre la valeur calculée et la valeur réelle, qui est connue. C'est la dépendance de (la valeur absolue de) cette différence vis-à-vis de h qui nous intéresse.

EXERCICE 6 *Expérimentalement, quel est le comportement de* $\left|\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right|$ *vis-à-vis de h ?*

Si f est de classe $\mathscr{C}^3$ au voisinage de x_0, on peut sensiblement améliorer la qualité d'approximation à moindre coût : d'une part $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} f'(x_0)$, mais d'autre part :

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0)\right| \leqslant \frac{M_3}{6}h^2,$$

avec M_3 un majorant de $\left|f^{(3)}\right|$ au voisinage de x_0.

EXERCICE 7 *Écrire une fonction approchant effectivement la dérivée d'une fonction en un point à l'aide de cette formule. La tester sur les exemples précédents et évaluer l'erreur effectuée en fonction de h.*

Ce dernier exercice est à traiter... à la maison ! Il s'agit d'approcher une dérivée seconde. Si f est deux fois dérivable en x_0 alors :

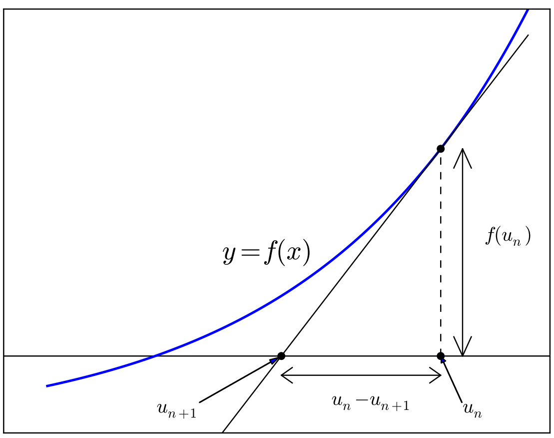
$$\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} f''(x_0).$$

EXERCICE 8 *Écrire une fonction mettant en œuvre cette formule. La tester sur des exemples simples, et évaluer l'erreur produite en fonction de h.*

3 Méthode de Newton

La méthode de Newton consiste à approcher un zéro de fonction en partant d'une première valeur u_0 « qu'on espère pas trop éloignée d'un zéro » et d'itérer le procédé géométrique suivant : on prend le point du graphe de f d'abscisse u_n, on trace la tangente au graphe que l'on suppose non horizontale [3], et on note u_{n+1} l'abscisse de l'intersection de cette tangente avec l'axe des x.

Un petit dessin ?

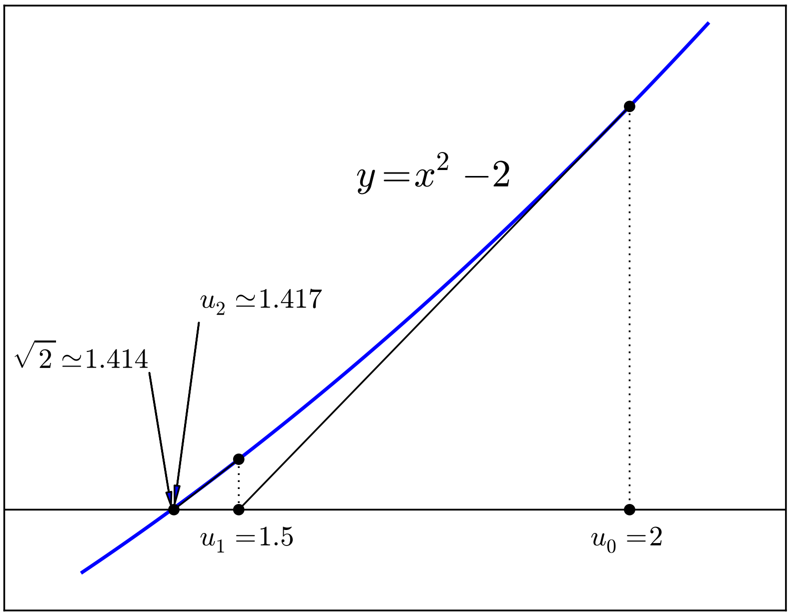


3. Ici, il faut croiser les doigts.

Si ce qu'on nous a raconté en seconde (définition d'une pente) et en terminale (pente d'une tangente) est vrai, alors la pente vaut d'une part $\dfrac{f(u_n)}{u_n - u_{n+1}}$ et d'autre part $f'(u_n)$, donc après un savant calcul :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

Sur l'exemple $x \mapsto x^2 - 2$, voici les trois premiers termes de la suite, en prenant $u_0 = 2$:



Il semble déjà difficile de représenter u_3 tant il sera près de $\sqrt{2}$. Bref, il semblerait que la convergence soit rapide[4]...

Pour mettre en place un algorithme à partir de cette construction géométrique, il faut décider d'un test d'arrêt. Un choix possible est : $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon$. Ceci ne garantit pas que f va posséder un zéro situé à moins de ε de u_{n+1}, mais en pratique ça marche plutôt bien.

Dernier problème : on a besoin de calculer $f'(u_n)$, alors qu'on ne dispose a priori que de f. On pourrait utiliser la deuxième partie de ce TP... mais pour simplifier les choses, on se place ici dans le cas où f' est connue.

EXERCICE 9 *Écrire une fonction prenant en entrée f, f', le premier terme u_0, ε, et renvoyant le premier terme u_K de la suite tel que $|u_K - u_{K-1}| \leqslant \varepsilon$.*

```
def newton(f, fprime, u0, epsilon):
    ....
```

EXERCICE 10 *Tester la fonction précédente avec la fonction $x \mapsto x^2 - 2$ (en partant de 2) puis la fonction sinus (en partant de 3) avec différentes valeurs de ε. Comparer alors $|r - z|$ et ε, avec r le résultat et z le zéro recherché.*

EXERCICE 11 *Modifier la fonction* `newton` *pour qu'elle affiche les valeurs intermédiaires jusqu'à un nombre d'itération imposé.*

```
def newton_bis(f, fprime, x0, nb_iter):
    ....
```

EXERCICE 12 *Évaluer $\log\left|u_n - z\right|$ (avec le logarithme binaire, z le zéro cherché et u_n la valeur après n itérations de Newton) pour $n \leqslant 20$ sur les deux cas d'école vus plus haut.*

Que dire de la convergence ?

EXERCICE 13 *Éteindre l'écran. En faisant un dessin puis le calcul à la main, que dire de la convergence de la méthode de Newton lorsque la fonction dont on cherche un zéro est $x \mapsto x^2$?*

4. Et effectivement, on peut le prouver, sous des conditions raisonnables.

4 Pour ceux qui s'ennuient

EXERCICE 14 Méthode de la sécante.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue, s'annulant en $a \in I$, concave ou convexe au voisinage de a. On fixe $u_0, u_1 \in I$ au voisinage de a et on construit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ de la façon suivante : pour tout $n \geqslant 2$, on définit u_n comme l'abscisse de l'intersection de l'axe des abscisses avec la sécante au graphe de f passant par les points d'abscisse u_{n-2} et u_{n-1}.

1. *Faire des dessins ; constater qu'il peut y avoir divergence, ou même que u_n peut ne pas être défini à partir d'un certain rang, mais que si u_0 et u_1 sont assez proches de a, on peut raisonnablement espérer qu'il y ait convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers a.*
2. *Donner une relation liant u_{n-2}, u_{n-1} et u_n.*
3. *Proposer un test d'arrêt pour la méthode de la sécante, qui consiste à approcher a en calculant des u_n jusqu'à ce qu'une certaine condition soit vérifiée.*
4. *Programmer et tester la méthode de la sécante.*
5. *Comparer la vitesse de convergence avec la méthode de Newton.*

EXERCICE 15 *On cherche à approcher une « racine » d'un complexe Z, c'est-à-dire un autre complexe r tel que $r^2 = Z$.*

1. *Si on applique la méthode de Newton à l'application $x \mapsto x^2 - 843$, quelle est la relation de récurrence obtenue ? Et vers quel réel peut-on espérer que la suite des itérés converge ?*

   Soit Z un complexe non nul. On définit une suite de complexes par son premier terme $z_n = Z$, et la relation de récurrence $z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{Z}{z_n}\right)$.
2. *On suppose : $Z = 1 + i$. Vers quel complexe la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble-t-elle converger ? Comparer à* `complex(1,1)**(0.5)`
3. *Faire d'autres tests avec Z dans différents quarts de plan.*

EXERCICE 16 *Si on applique la méthode de Newton à l'application complexe $z \mapsto z^3 + 1$, on obtient une suite qui converge (sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs initiales) vers -1, $-j = -\mathrm{e}^{2i\pi/3}$ ou $-j^2$.*

Vérifier expérimentalement cette affirmation.

Le lecteur courageux construisant un graphique représentant pour chaque valeur initiale la valeur limite à l'aide d'un point d'une certaine couleur... sera bien récompensé de ses efforts ! Les ensembles représentés s'appellent des bassins d'attraction et sont ici des fractals.

5 Besoin d'indications ?

Mais non...