Exemples du cours Applications du produit scalaire 2019/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

3 juin 2020

Table des matières

Capacité 1 : déterminer une ligne de niveau, partie 1

Soit un segment $[AB]$ de longueur 4 et I son milieu.

Soit un segment $[AB]$ de longueur 4 et I son milieu.

- Soit M un point du plan tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2$.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2 \Longleftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 2$$

I milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2 \Longleftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = 2$$
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2 \Longleftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = 2$$
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2 \Longleftrightarrow MI^2 - AI^2 = 2$$

Capacité 1 : déterminer une ligne de niveau, partie 2

- Soit Γ l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2$.

$$M \in \Gamma \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2$$

d'après la question précédente :

$$M \in \Gamma \iff MI^2 - AI^2 = 2$$
$$M \in \Gamma \iff MI^2 = AI^2 + 2$$

$AI = AB/2 = 2$

$$M \in \Gamma \iff MI^2 = 6$$

Γ est donc le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{6}$.

Capacité 2 : Calculer des angles ou des longueurs avec le produit scalaire, partie 1

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 5, BC = 6$.

Capacité 2 : Calculer des angles ou des longueurs avec le produit scalaire, partie 1

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 5, BC = 6$.

- D'après la propriété d'*Al-Kashi* :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$$
$$\cos(\widehat{ABC}) = (AB^2 + BC^2 - AC^2)/(2 \times AB \times BC)$$
$$\cos(\widehat{ABC}) = (16 + 36 - 25)/(2 \times 4 \times 6)$$
$$\cos(\widehat{ABC}) = (16 + 36 - 25)/(2 \times 4 \times 6)$$
$$\widehat{ABC} \approx 56^\circ \text{ au degré près}$$

Capacité 2 : Calculer des angles ou des longueurs avec le produit scalaire, partie 2

Soit ABC un triangle tel que $BC = 4$, $\widehat{ABC} = 50°$ et $AB = 3$.
Calculer la longueur AC.

Capacité 2 : Calculer des angles ou des longueurs avec le produit scalaire, partie 2

Soit ABC un triangle tel que $BC = 4$, $\widehat{ABC} = 50°$ et $AB = 3$.
Calculer la longueur AC.

- D'après la propriété d'*Al-Kashi* :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$$
$$AC^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4\cos(50)$$
$$AC = \sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4\cos(50)}$$
$$A \approx 3,1$$

Capacité 2 : Calculer des angles ou des longueurs avec le produit scalaire, partie 3

Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = 30°$, $AC = 2$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$.
Calculer la longueur BC.

Capacité 2 : Calculer des angles ou des longueurs avec le produit scalaire, partie 3

Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = 30°$, $AC = 2$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$. Calculer la longueur BC.

- D'après la propriété du cosinus :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$5 = 2 \times AB \times \cos(30)$$

$$AB = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Capacité 2 : Calculer des angles ou des longueurs avec le produit scalaire, partie 3

Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = 30°$, $AC = 2$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$. Calculer la longueur BC.

- D'après la propriété du cosinus :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$
$$5 = 2 \times AB \times \cos(30)$$
$$AB = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

- Ensuite, d'après la propriété d'Al-Kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$
$$BC^2 = 25/3 + 4 - 10$$
$$BC = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

Capacité 3 : Déterminer un vecteur directeur ou un vecteur normal, partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(4\,;5)$ et $B(6\,;3)$.

Capacité 3 : Déterminer un vecteur directeur ou un vecteur normal, partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(4\,;5)$ et $B(6\,;3)$.

- Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}\,(2\,;-2)$.

Capacité 3 : Déterminer un vecteur directeur ou un vecteur normal, partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(4;5)$ et $B(6;3)$.

- Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}\,(2;-2)$.
- Si $\overrightarrow{u}\,(c;d)$ est un vecteur directeur d'une droite alors $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal si et seulement si $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 0$, donc on peut choisir $\overrightarrow{n}\,(-d;c)$.
  Dans notre cas, $\overrightarrow{n}\,(2;2)$ est un vecteur normal à (AB)

Capacité 3 : Déterminer un vecteur directeur ou un vecteur normal, partie 2

Si $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ alors un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\,(-b\,;a)$ et un vecteur normal est $\overrightarrow{n}\,(a\,;b)$.

Capacité 3 : Déterminer un vecteur directeur ou un vecteur normal, partie 2

Si $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ alors un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\,(-b\,;a)$ et un vecteur normal est $\overrightarrow{n}\,(a\,;b)$.

- $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = x \Leftrightarrow x - y = 0$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(1\,;-1)$ et pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(1\,;1)$.

Capacité 3 : Déterminer un vecteur directeur ou un vecteur normal, partie 2

Si $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ alors un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\ (-b\,;a)$ et un vecteur normal est $\overrightarrow{n}\ (a\,;b)$.

- $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = x \Leftrightarrow x - y = 0$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\ (1\,;-1)$ et pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\ (1\,;1)$.
- $\mathscr{D}_2$ d'équation $y = -2x \Leftrightarrow 2x + y = 0$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\ (2\,;1)$ et pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\ (-1\,;2)$.

Capacité 3 : Déterminer un vecteur directeur ou un vecteur normal, partie 2

Si $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ alors un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\ (-b\,; a)$ et un vecteur normal est $\overrightarrow{n}\ (a\,; b)$.

- $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = x \Leftrightarrow x - y = 0$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\ (1\,; -1)$ et pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\ (1\,; 1)$.
- $\mathscr{D}_2$ d'équation $y = -2x \Leftrightarrow 2x + y = 0$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\ (2\,; 1)$ et pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\ (-1\,; 2)$.
- $\mathscr{D}_3$ d'équation $y = 3 \Leftrightarrow y - 3 = 0$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\ (0\,; 1)$ et pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\ (1\,; 0)$.

Capacité 3 : Déterminer un vecteur directeur ou un vecteur normal, partie 2

Si $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ alors un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\ (-b\,;a)$ et un vecteur normal est $\overrightarrow{n}\ (a\,;b)$.

- $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = x \Leftrightarrow x - y = 0$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\ (1\,;-1)$ et pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\ (1\,;1)$.
- $\mathscr{D}_2$ d'équation $y = -2x \Leftrightarrow 2x + y = 0$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\ (2\,;1)$ et pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\ (-1\,;2)$.
- $\mathscr{D}_3$ d'équation $y = 3 \Leftrightarrow y - 3 = 0$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\ (0\,;1)$ et pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\ (1\,;0)$.
- $\mathscr{D}_4$ d'équation $x = 4 \Leftrightarrow x - 4 = 0$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\ (1\,;0)$ et pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\ (0\,;1)$.

Capacité 4 : Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur normal

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2;3)$ et $B(-5;4)$, I le milieu de $[AB]$ et Δ la médiatrice de $[AB]$.

Capacité 4 : Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur normal

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2;3)$ et $B(-5;4)$, I le milieu de $[AB]$ et Δ la médiatrice de $[AB]$.

- La médiatrice d'un segment est la perpendiculaire à ce segment en son milieu. On en déduit que :

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Capacité 4 : Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur normal

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2;3)$ et $B(-5;4)$, I le milieu de $[AB]$ et Δ la médiatrice de $[AB]$.

- La médiatrice d'un segment est la perpendiculaire à ce segment en son milieu. On en déduit que :

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

- On a $\overrightarrow{AB}\,(-7;1)$ et $I(-3/2;7/2)$ donc si $M(x;y)$, alors $\overrightarrow{IM}\,(x+3/2;y-7/2)$. D'après la question précédente :

$$M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow -7(x+3/2)+(y-7/2)=0$$
$$M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow -7x+y-14=0$$

Capacité 5 : Déterminer un vecteur normal à une droite Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $2y - 3x + 6 = 0$.

Capacité 5 : Déterminer un vecteur normal à une droite Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $2y - 3x + 6 = 0$.

- Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{D}_1$ avec l'axe des abscisses, on résout le système :

$$\begin{cases} 2y - 3x + 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\mathscr{D}$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(2\,;0)$.

Capacité 5 : Déterminer un vecteur normal à une droite Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $2y - 3x + 6 = 0$.

- Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{D}_1$ avec l'axe des abscisses, on résout le système :

$$\begin{cases} 2y - 3x + 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

  $\mathscr{D}$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(2\,;0)$.

- Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{D}_1$ avec l'axe des ordonnées, on résout le système :

$$\begin{cases} 2y - 3x + 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 0 \end{cases}$$

  $\mathscr{D}$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;-3)$.

Capacité 5 : Déterminer un vecteur normal à une droite Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $2y - 3x + 6 = 0$.

Capacité 5 : Déterminer un vecteur normal à une droite Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $2y - 3x + 6 = 0$.

- Un vecteur normal à $\mathscr{D}_1$ est $\overrightarrow{n}\,(-3\,;2)$, c'est aussi un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}_2$ parallèle à $\mathscr{D}_1$ et passant par $B\,(1\,;2)$.

Capacité 5 : Déterminer un vecteur normal à une droite Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $2y - 3x + 6 = 0$.

- Un vecteur normal à $\mathscr{D}_1$ est $\overrightarrow{n}\,(-3\,;2)$, c'est aussi un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}_2$ parallèle à $\mathscr{D}_1$ et passant par $B(1\,;2)$.
- Une équation de $\mathscr{D}_2$ est donc de la forme $-3x + 2y + c = 0$.

Capacité 5 : Déterminer un vecteur normal à une droite Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $2y - 3x + 6 = 0$.

- Un vecteur normal à $\mathscr{D}_1$ est $\overrightarrow{n}\,(-3\,;2)$, c'est aussi un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}_2$ parallèle à $\mathscr{D}_1$ et passant par $B\,(1\,;2)$.
- Une équation de $\mathscr{D}_2$ est donc de la forme $-3x + 2y + c = 0$.
- $$B\,(1\,;2) \in \mathscr{D}_2 \Leftrightarrow -3 + 4 + c = 0$$
  $$B\,(1\,;2) \in \mathscr{D}_2 \Leftrightarrow c = -1$$

  Une équation de $\mathscr{D}_2$ est $-3x + 2y - 1 = 0$

Capacité 5 : Déterminer un vecteur normal à une droite Partie 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $2y-3x+6=0$.

Capacité 5 : Déterminer un vecteur normal à une droite Partie 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $2y - 3x + 6 = 0$.

- Un vecteur directeur e $\mathscr{D}_1$ est $\overrightarrow{u}\,(-2\,;-3)$, c'est aussi un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}_3$ perpendiculaire à $\mathscr{D}_1$ et passant par $B(1\,;2)$.

Capacité 5 : Déterminer un vecteur normal à une droite Partie 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $2y-3x+6=0$.

- Un vecteur directeur e $\mathscr{D}_1$ est $\overrightarrow{u}\,(-2\,;-3)$, c'est aussi un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}_3$ perpendiculaire à $\mathscr{D}_1$ et passant par $B(1\,;2)$.
- Une équation de $\mathscr{D}_3$ est donc de la forme $-2x-3y+c=0$.

Capacité 5 : Déterminer un vecteur normal à une droite Partie 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $2y - 3x + 6 = 0$.

- Un vecteur directeur e $\mathscr{D}_1$ est $\overrightarrow{u}\,(-2\,;-3)$, c'est aussi un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}_3$ perpendiculaire à $\mathscr{D}_1$ et passant par $B(1\,;2)$.
- Une équation de $\mathscr{D}_3$ est donc de la forme $-2x - 3y + c = 0$.
- $$B(1\,;2) \in \mathscr{D}_3 \Leftrightarrow -2 - 6 + c = 0$$
  $$B(1\,;2) \in \mathscr{D}_3 \Leftrightarrow c = 8$$

  Une équation de $\mathscr{D}_3$ est $-2x - 3y + 8 = 0$.

Capacité 6 : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite, Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x+2y-4=0$ et le point $A(3;3)$.

Capacité 6 : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite, Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x+2y-4=0$ et le point $A(3;3)$.

- Soit Δ la droite perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant A. $\overrightarrow{u}(-2;1)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ et donc un vecteur normal à Δ.

Capacité 6 : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite, Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x+2y-4=0$ et le point $A(3;3)$.

- Soit Δ la droite perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant A. $\overrightarrow{u}(-2;1)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ et donc un vecteur normal à Δ.
- Une équation de Δ est donc de la forme $-2x+y+c=0$.

Capacité 6 : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite, Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x+2y-4=0$ et le point $A(3;3)$.

- Soit Δ la droite perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant A. $\overrightarrow{u}\,(-2;1)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ et donc un vecteur normal à Δ.
- Une équation de Δ est donc de la forme $-2x+y+c=0$.
- $$A(3;3)\in\Delta \Leftrightarrow -6+3+c=0$$
  $$A(3;3)\in\Delta \Leftrightarrow c=3$$

Capacité 6 : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite, Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x+2y-4=0$ et le point $A(3;3)$.

- Soit Δ la droite perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant A. $\overrightarrow{u}(-2;1)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ et donc un vecteur normal à Δ.
- Une équation de Δ est donc de la forme $-2x+y+c=0$.
- $$A(3;3)\in\Delta \Leftrightarrow -6+3+c=0$$
  $$A(3;3)\in\Delta \Leftrightarrow c=3$$
- Une équation de Δ est donc $-2x+y+3=0$.

Capacité 6 : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite, Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x+2y-4=0$ et le point $A(3;3)$. On a démontrée qu'une équation de Δ la perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par A est $-2x+y+3=0$.

Capacité 6 : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite, Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x+2y-4=0$ et le point $A(3;3)$. On a démontrée qu'une équation de Δ la perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par A est $-2x+y+3=0$.

- Le projeté orthogonal H de A sur $\mathscr{D}$ est le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de Δ.

Capacité 6 : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite, Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x + 2y - 4 = 0$ et le point $A(3;3)$. On a démontrée qu'une équation de Δ la perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par A est $-2x + y + 3 = 0$.

- Le projeté orthogonal H de A sur $\mathscr{D}$ est le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de Δ.
- Les coordonnées de H sont solutions du système :

$$\begin{cases} -2x + y + 3 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x + 2(2x - 3) - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 5x = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + y + 3 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Les coordonnées de H sont donc $(2;1)$.

Capacité 7 : Déterminer et utiliser une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon, Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2\,;1)$ et $B(5\,;3)$.
Soit Γ le cercle de diamètre $[AB]$.

Capacité 7 : Déterminer et utiliser une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon, Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2\,;1)$ et $B(5\,;3)$.
Soit Γ le cercle de diamètre $[AB]$.

- Le centre I du cercle Γ est le milieu du segment $[AB]$, ses coordonnées sont $\left(\frac{2+5}{2}\,;\frac{1+3}{2}\right)$ soit $\left(\frac{7}{2}\,;2\right)$.

Capacité 7 : Déterminer et utiliser une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon, Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2\,;1)$ et $B(5\,;3)$.
Soit Γ le cercle de diamètre $[AB]$.

- Le centre I du cercle Γ est le milieu du segment $[AB]$, ses coordonnées sont $\left(\frac{2+5}{2}\,;\,\frac{1+3}{2}\right)$ soit $\left(\frac{7}{2}\,;2\right)$.
- Le rayon du cercle est $\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(5-2)^2+(3-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Capacité 7 : Déterminer et utiliser une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon, Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2\,;1)$ et $B(5\,;3)$.
Soit Γ le cercle de diamètre $[AB]$.

- Le centre I du cercle Γ est le milieu du segment $[AB]$, ses coordonnées sont $\left(\frac{2+5}{2}\,;\,\frac{1+3}{2}\right)$ soit $\left(\frac{7}{2}\,;2\right)$.
- Le rayon du cercle est $\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(5-2)^2+(3-1)^2}}{2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$.
- Une équation de Γ est donc $(x-\frac{7}{2})^2+(y-2)^2=\frac{13}{4}$.

Capacité 7 : Déterminer et utiliser une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon, Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2;1)$ et $B(5;3)$. Soit $\mathscr{T}$ la tangente à Γ au point A.

Capacité 7 : Déterminer et utiliser une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon, Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2;1)$ et $B(5;3)$. Soit $\mathscr{T}$ la tangente à Γ au point A.

- Le centre du cercle Γ est $I\left(\frac{7}{2};2\right)$ donc $\overrightarrow{AI}\left(\frac{3}{2};1\right)$ est un vecteur normal à $\mathscr{T}$.

Capacité 7 : Déterminer et utiliser une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon, Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2;1)$ et $B(5;3)$. Soit $\mathscr{T}$ la tangente à Γ au point A.

- Le centre du cercle Γ est $I\left(\frac{7}{2};2\right)$ donc $\overrightarrow{AI}\left(\frac{3}{2};1\right)$ est un vecteur normal à $\mathscr{T}$.
- Une équation de $\mathscr{T}$ est donc de la forme $\frac{3}{2}x+y+c=0$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2;1)$ et $B(5;3)$. Soit $\mathscr{T}$ la tangente à Γ au point A.

- Le centre du cercle Γ est $I\left(\frac{7}{2};2\right)$ donc $\overrightarrow{AI}\left(\frac{3}{2};1\right)$ est un vecteur normal à $\mathscr{T}$.
- Une équation de $\mathscr{T}$ est donc de la forme $\frac{3}{2}x+y+c=0$
- $$A(2;1)\in\mathscr{T}\Leftrightarrow 1+1+c=0$$
  $$A(2;1)\in\mathscr{T}\Leftrightarrow c=-2$$

Capacité 7 : Déterminer et utiliser une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon, Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2;1)$ et $B(5;3)$. Soit $\mathscr{T}$ la tangente à Γ au point A.

- Le centre du cercle Γ est $I\left(\frac{7}{2};2\right)$ donc $\overrightarrow{AI}\left(\frac{3}{2};1\right)$ est un vecteur normal à $\mathscr{T}$.
- Une équation de $\mathscr{T}$ est donc de la forme $\frac{3}{2}x+y+c=0$
- $$A(2;1)\in\mathscr{T}\Leftrightarrow 1+1+c=0$$
  $$A(2;1)\in\mathscr{T}\Leftrightarrow c=-2$$
- Une équation de $\mathscr{T}$ est donc $\frac{3}{2}x+y-2=0$.

Capacité 7 : Déterminer et utiliser une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon, Partie 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2;1)$ et $B(5;3)$. Une équation de Γ est donc $(x-\frac{7}{2})^2+(y-2)^2=\frac{13}{4}$. On considère la droite Δ d'équation $x+y=6$.

Capacité 7 : Déterminer et utiliser une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon, Partie 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2;1)$ et $B(5;3)$. Une équation de Γ est donc $(x-\frac{7}{2})^2+(y-2)^2=\frac{13}{4}$. On considère la droite Δ d'équation $x+y=6$.

- Les coordonnées d'un point d'intersection de Γ et de la droite Δ sont solutions du système :

$$\begin{cases}(x-\frac{7}{2})^2+(y-2)^2=\frac{13}{4}\\ x+y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-\frac{7}{2})^2+(4-x)^2=\frac{13}{4}\\ y=6-x\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-\frac{7}{2})^2+(y-2)^2=\frac{13}{4}\\ x+y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-15x+25=0\\ y=6-x\end{cases}$$

On résout l'équation $2x^2-15x+25=0$ de discriminant $b^2-4ac=25$ et de racines 5 et $\frac{5}{2}$

$$\begin{cases}(x-\frac{7}{2})^2+(y-2)^2=\frac{13}{4}\\ x+y=6\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}x=5\\ y=1\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x=5/2\\ y=3,5\end{cases}}$$

Capacité 8 : Reconnaître le centre et le rayon d'un cercle à partir de son équation, Partie 1

Le plan muni d'un repère orthonormé.

Capacité 8 : Reconnaître le centre et le rayon d'un cercle à partir de son équation, Partie 1

Le plan muni d'un repère orthonormé.

- Soit Γ l'ensemble des points $M(x;y)$ dont les coordonnées vérifient $x^2+y^2+2=0$.

$$M(x;y)\in\Gamma \Leftrightarrow x^2+y^2+2=0$$
$$M(x;y)\in\Gamma \Leftrightarrow x^2+y^2=-2$$

Or pour tout couple de réels (x,y), on a $x^2+y^2\geqslant 0$

Capacité 8 : Reconnaître le centre et le rayon d'un cercle à partir de son équation, Partie 1

Le plan muni d'un repère orthonormé.

- Soit Γ l'ensemble des points $M(x;y)$ dont les coordonnées vérifient $x^2+y^2+2=0$.

$$M(x;y) \in \Gamma \Leftrightarrow x^2+y^2+2=0$$
$$M(x;y) \in \Gamma \Leftrightarrow x^2+y^2=-2$$

Or pour tout couple de réels (x,y), on a $x^2+y^2 \geqslant 0$

- On en déduit que Γ est un ensemble vide.

Capacité 8 : Reconnaître le centre et le rayon d'un cercle à partir de son équation, Partie 2

Le plan muni d'un repère orthonormé.

Capacité 8 : Reconnaître le centre et le rayon d'un cercle à partir de son équation, Partie 2

Le plan muni d'un repère orthonormé.

- Soit Γ l'ensemble des points $M(x;y)$ dont les coordonnées vérifient $x^2-2x+y^2+6y-26=0$.

$$M(x;y)\in\Gamma \Leftrightarrow x^2-2x+y^2+6y-26=0$$
$$M(x;y)\in\Gamma \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+6y+9-1-9-26=0$$
$$M(x;y)\in\Gamma \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2-1-9-26=0$$
$$M(x;y)\in\Gamma \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=6^2$$

Capacité 8 : Reconnaître le centre et le rayon d'un cercle à partir de son équation, Partie 2

Le plan muni d'un repère orthonormé.

- Soit Γ l'ensemble des points $M(x;y)$ dont les coordonnées vérifient $x^2-2x+y^2+6y-26=0$.

$$M(x;y)\in\Gamma \Leftrightarrow x^2-2x+y^2+6y-26=0$$
$$M(x;y)\in\Gamma \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+6y+9-1-9-26=0$$
$$M(x;y)\in\Gamma \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2-1-9-26=0$$
$$M(x;y)\in\Gamma \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=6^2$$

- On en déduit que Γ est le cercle de centre $\Omega(1;-3)$ et de rayon 6.

Le plan muni d'un repère orthonormé.

Le plan muni d'un repère orthonormé.

- Une équation cartésienne du cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 1 est $x^2+y^2=1^2$.

Le plan muni d'un repère orthonormé.

- Une équation cartésienne du cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 1 est $x^2+y^2=1^2$.
- Si on suppose $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, alors :

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{1-x^2} \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

Le plan muni d'un repère orthonormé.

- Une équation cartésienne du cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 1 est $x^2+y^2=1^2$.
- Si on suppose $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, alors :

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{1-x^2} \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

- L'aire $\mathscr{A}$ est celle d'un quart de disque de rayon 1, sa valeur est donc de $\frac{\pi}{4}$.

Calculs des sommes d'aires de rectangles.

Calculs des sommes d'aires de rectangles.

- ```python
  from math import sqrt

  def sommeRectGauche(n):
      s = 0
      for k in range(n):
          s = s + sqrt(1 - (k/n) ** 2)
      return s
  ```
  ```

Calculs des sommes d'aires de rectangles.

- ```
  from math import sqrt

  def sommeRectGauche(n):
      s = 0
      for k in range(n):
          s = s + sqrt(1 - (k/n) ** 2)
      return s
  ```

  ```
  from math import sqrt

  def sommeRectDroite(n):
      s = 0
      for k in range(n):
          s = s + sqrt(1 - ((k+1)/n) ** 2)
      return s
  ```
  ```

On encadre l'aire du demi-disque par deux sommes d'aires de rectangles.

On encadre l'aire du demi-disque par deux sommes d'aires de rectangles.

- ```
  epsilon = 0.001
  n = 1
  while 4 * (sommeRectDroite(n) -
       sommeRectGauche(n)) >= epsilon:
      n += 1
  print(n, 4 * sommeRectDroite(n), 4 *
       sommeRectGauche(n))
  ```
  ```

Capacité 9, Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole, Partie 1

Une parabole $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses aux abscisses -4 et 2 et l'axe des ordonnées à l'ordonnée 6.

Capacité 9, Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole, Partie 1

Une parabole $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses aux abscisses -4 et 2 et l'axe des ordonnées à l'ordonnée 6.

- Une équation de $\mathscr{P}$ est de la forme $y = ax^2 + bx + c$.

Capacité 9, Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole, Partie 1

Une parabole $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses aux abscisses -4 et 2 et l'axe des ordonnées à l'ordonnée 6.

- Une équation de $\mathscr{P}$ est de la forme $y = ax^2 + bx + c$.
- L'abscisse α où l'axe de symétrie coupe l'axe des abscisses, est le milieu de l'intervalle $[-4\,;2]$ donc $\alpha = \frac{-4+2}{2} = -1$. On a donc $-\frac{b}{2a} = -1$ et donc $b = 2a$.

Capacité 9, Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole, Partie 1

Une parabole $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses aux abscisses -4 et 2 et l'axe des ordonnées à l'ordonnée 6.

- Une équation de $\mathscr{P}$ est de la forme $y = ax^2 + bx + c$.
- L'abscisse α où l'axe de symétrie coupe l'axe des abscisses, est le milieu de l'intervalle $[-4\,;2]$ donc $\alpha = \frac{-4+2}{2} = -1$. On a donc $-\frac{b}{2a} = -1$ et donc $b = 2a$.
- Par hypothèse on a $6 = a \times 0^2 + b \times 0 + c$ donc $c = 6$.

Une parabole $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses aux abscisses -4 et 2 et l'axe des ordonnées à l'ordonnée 6.

- Une équation de $\mathscr{P}$ est de la forme $y = ax^2 + bx + c$.
- L'abscisse α où l'axe de symétrie coupe l'axe des abscisses, est le milieu de l'intervalle $[-4\,;2]$ donc $\alpha = \frac{-4+2}{2} = -1$. On a donc $-\frac{b}{2a} = -1$ et donc $b = 2a$.
- Par hypothèse on a $6 = a \times 0^2 + b \times 0 + c$ donc $c = 6$.
- Toujours par hypothèse, on a $0 = a \times 2^2 + 2b + c$. On déduit de ce qui précède que $0 = 4a + 4a + 6 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}$.

Capacité 9, Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole, Partie 1

Une parabole $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses aux abscisses -4 et 2 et l'axe des ordonnées à l'ordonnée 6.

- Une équation de $\mathscr{P}$ est de la forme $y = ax^2 + bx + c$.
- L'abscisse α où l'axe de symétrie coupe l'axe des abscisses, est le milieu de l'intervalle $[-4\,;2]$ donc $\alpha = \frac{-4+2}{2} = -1$. On a donc $-\frac{b}{2a} = -1$ et donc $b = 2a$.
- Par hypothèse on a $6 = a \times 0^2 + b \times 0 + c$ donc $c = 6$.
- Toujours par hypothèse, on a $0 = a \times 2^2 + 2b + c$. On déduit de ce qui précède que $0 = 4a + 4a + 6 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}$.
- Une équation de $\mathscr{P}$ est donc $y = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 6$.