

Exercices sur les applications du produit scalaire 2019/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

23 mai 2020

Plan

- 1 Exercices du manuel Barbazo
- 2 Géométrie du triangle
- 3 Géométrie repérée

Table des matières, géométrie du triangle

- Exercice 32 p. 228
- Exercice 34 p. 228
- Exercice 36 p. 228
- Exercice 39 p. 229
- Exercice 41 p. 229
- Exercice 43 p. 229
- Exercice 44 p. 229
- Exercice 46 p. 229

Table des matières, géométrie repérée

- Exercice 1 p. 258
- Exercice 3 p. 258
- Exercice 4 p. 258
- Exercice 5 p. 258
- Exercice 6 p. 258
- Exercice 8 p. 258
- Exercice 10 p. 259
- Exercice 11 p. 259
- Exercice 12 p. 259
- Exercice 13 p. 259
- Exercice 15 p. 259
- Exercice 16 p. 259
- Exercice 17 p. 259

Table des matières, géométrie repérée Partie 2

- Exercice 33 p. 260
- Exercice 34 p. 261
- Exercice 35 p. 261
- Exercice 37 p. 261

Plan

- 1 Exercices du manuel Barbazo
- 2 Géométrie du triangle
- 3 Géométrie repérée

Barbazo, exercice 32 p.228

32 D'après la formule d'Al-Kashi,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A}).$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A})$$

$$\Leftrightarrow \cos(\hat{A}) = \frac{BC^2 - (AB^2 + AC^2)}{-2 \times AB \times AC} \Leftrightarrow \cos(\hat{A}) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC}$$

Donc, $\cos(\hat{A}) = \frac{4^2 + 6^2 - 7^2}{2 \times 4 \times 6} = \frac{1}{16}$. La calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée à $0,1^\circ$ près de l'angle, soit $\hat{A} = 86,4^\circ$.

$$\text{De même, } \cos(\hat{B}) = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \times AB \times BC} = \frac{4^2 + 7^2 - 6^2}{2 \times 4 \times 7} = \frac{29}{56}.$$

La calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée à $0,1^\circ$ près de l'angle, soit $\hat{B} = 58,8^\circ$.

$$\text{Enfin } \cos(\hat{C}) = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \times AC \times BC} = \frac{6^2 + 7^2 - 4^2}{2 \times 6 \times 7} = \frac{69}{84} = \frac{23}{28}.$$

La calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée à $0,1^\circ$ près de l'angle, soit $\hat{C} = 34,8^\circ$.

Barbazo, exercice 34 p. 228

34 1. Dans le triangle ACI rectangle en A , d'après le théorème de Pythagore : $CI^2 = AI^2 + AC^2 = 3^2 + 8^2 = 73$.
On a donc $CI = \sqrt{73}$ cm.

Dans le triangle ACB rectangle en A , d'après le théorème de Pythagore : $CB^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$.

On a donc $BC = \sqrt{100} = 10$ cm.

2. Dans le triangle BCI , d'après la formule d'Al-Kashi,
 $BI^2 = IC^2 + BC^2 - 2 \times IC \times BC \times \cos(\widehat{ICB})$.

$$BI^2 = IC^2 + BC^2 - 2 \times IC \times BC \cos(\widehat{ICB})$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{ICB}) = \frac{IC^2 + BC^2 - BI^2}{2 \times IC \times BC}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{ICB}) = \frac{73 + 100 - 9}{2 \times \sqrt{73} \times 10}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{ICB}) = \frac{164}{20\sqrt{73}} \Leftrightarrow \cos(\widehat{ICB}) = \frac{41}{5\sqrt{73}}$$

La calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée à 1° près de l'angle, soit $\widehat{ICB} = 16^\circ$.

Barbazo, exercice 36 p.228

36 1. Dans le triangle ABC rectangle en A , d'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 10^2 - 4^2 = 100 - 16 = 84$.
 AC est une grandeur positive donc $AC = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$.

D'après le théorème de la médiane :

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CI^2 - \frac{AB^2}{4}$$
$$\Leftrightarrow CI^2 = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow CI^2 = CA^2 + \frac{AB^2}{4}$$

$$\text{Soit } CI^2 = \sqrt{84}^2 + \frac{4^2}{4} = 84 + 4 = 88.$$

CI est une grandeur positive donc $CI = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$.

2. Dans le triangle BIC , d'après la formule d'Al-Kashi :

$$BI^2 = CI^2 + BC^2 - 2 \times CI \times BC \times \cos(\alpha)$$
$$\Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{CI^2 + BC^2 - BI^2}{2 \times CI \times BC}$$

$$\text{Soit } \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{88}^2 + 10^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{88} \times 10} = \frac{184}{20\sqrt{88}} = \frac{23}{5\sqrt{22}}$$

La calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée à 1° près de l'angle, soit $\alpha = 11^\circ$.

Barbazo, exercice 39 p.229

- 39 Dans le triangle ABC , d'après la formule d'Al-Kashi :
- $$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2 \times BC \times AB \times \cos(\widehat{ABC}).$$
- Soit :
- $$AC^2 = 0,8^2 + 1^2 - 2 \times 0,8 \times 1 \times \cos(82) = 1,64 - 1,6 \times \cos(82).$$
- BC est une grandeur positive donc
- $$BC = \sqrt{1,64 - 1,6 \times \cos(82)} = 1,19.$$
- Après avoir été déportée, la deuxième boule se situe à 1,19 m, au centimètre près, du point de lancement de la première boule.

Barbazo, exercice 41 p.229

- 41 Pour tout point M distinct de N et P , on a le triangle MNP qui est rectangle en M si et seulement si le produit scalaire $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$ est nul. D'après le théorème de la médiane :
$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{NP^2}{4} = 0 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{NP^2}{4}.$$
 MN et MI sont des grandeurs positives, on a donc le triangle MNP qui est rectangle en M si et seulement si $MI = \frac{NP}{2}$.

Barbazo, exercice 43 p.229

$$\textcircled{43} \quad AB = \sqrt{(-1-5)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}$$

Soit I le milieu du segment $[AB]$.

D'après le théorème de la médiane, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -6 &\Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = -6 \Leftrightarrow MI^2 = -6 + \frac{\sqrt{61}^2}{4} \\ &\Leftrightarrow MI^2 = \frac{37}{4} \Leftrightarrow MI = \frac{\sqrt{37}}{2}. \end{aligned}$$

L'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -6$ est
le cercle de centre I et de rayon $\frac{\sqrt{37}}{2}$.

Barbazo, exercice 44 p.229

44 1. Dans le triangle ABC , d'après la formule d'Al-Kashi :

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2 \times BC \times AB \times \cos(\widehat{ABC}).$$

Soit $AC^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \cos(60) = 64 + 25 - 40 = 49$.

BC est une grandeur positive donc $BC = \sqrt{49} = 7$.

Soit P le périmètre du triangle ABC , on a :

$$P = AB + BC + CA = 5 + 8 + 7 = 20.$$

2. Soit \mathcal{A}_{BDC} l'aire du triangle BDC , on a $\mathcal{A}_{BDC} = \frac{r \times BC}{2}$.

De même $\mathcal{A}_{CDA} = \frac{r \times CA}{2}$ et $\mathcal{A}_{ADB} = \frac{r \times AB}{2}$.

On a donc :

$$S = \mathcal{A}_{BDC} + \mathcal{A}_{CDA} + \mathcal{A}_{ADB} = \frac{r \times (BC + CA + AB)}{2} = \frac{P \times r}{2}.$$

3. Soit H le projeté orthogonal du point C sur le segment $[AB]$. Dans le triangle CHB rectangle en H , on a :

$$\sin(\widehat{ABC}) = \frac{CH}{CB} \Leftrightarrow CH = CB \times \sin(\widehat{ABC})$$

$$\Leftrightarrow CH = 8 \times \sin(60) \Leftrightarrow CH = 4\sqrt{3}.$$

Or, $S = \frac{CH \times AB}{2}$, donc $S = \frac{4\sqrt{3} \times 5}{2} = 10\sqrt{3}$.

$$4. S = \frac{P \times r}{2} \Leftrightarrow r = \frac{2S}{P} \Leftrightarrow r = \frac{2 \times 10\sqrt{3}}{20} \Leftrightarrow r = 3.$$

Le cercle inscrit dans le triangle ABC a pour rayon $\sqrt{3}$.

Barbazo, exercice 46 p.229 Partie 1

46 1. Soit I le milieu du segment $[AB]$.

D'après le théorème de la médiane, on a :

$$\begin{aligned}\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 5 &\Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 5 \Leftrightarrow MI^2 = 5 + \frac{5^2}{4} \\ &\Leftrightarrow MI^2 = \frac{45}{4} \Leftrightarrow MI = \frac{3\sqrt{5}}{2}. \text{ Réponse a.}\end{aligned}$$

Barbazo, exercice 46 p.229 Partie 2

2. Soit D le point tel que $\overrightarrow{DA} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$, alors :

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = DA \times AB = 5.$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 5 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{DA}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MD} = 0.$$

L'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 5$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le point D .

Plan

- 1 Exercices du manuel Barbazo
- 2 Géométrie du triangle
- 3 Géométrie repérée

Barbazo, exercice 1 p. 258

-
- 1 a. $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à \mathcal{D} .
- b. $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à \mathcal{D} .
- c. $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à \mathcal{D} .
- d. $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à \mathcal{D} .

Barbazo, exercice 2 p. 258

2 D'après la figure, on conjecture que les deux vecteurs normaux à \mathcal{D} sont \vec{n}_1 , \vec{n}_3 et \vec{n}_6 . Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Le vecteur \vec{n}_1 a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Or, $\vec{n}_1 \cdot \vec{u} = 2 \times 1 - 1 \times 2 = 0$. Les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{u} sont orthogonaux. On en déduit que \vec{n}_1 est un vecteur normal à la droite \mathcal{D} .

Le vecteur \vec{n}_3 a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Or, $\vec{n}_3 \cdot \vec{u} = 2 \times 2 - 1 \times 4 = 0$. Les vecteurs \vec{n}_3 et \vec{u} sont orthogonaux. On en déduit que \vec{n}_3 est un vecteur normal à la droite \mathcal{D} .

Le vecteur \vec{n}_6 a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Or, $\vec{n}_6 \cdot \vec{u} = 2 \times (-1) - 1 \times (-2) = 0$. Les vecteurs \vec{n}_6 et \vec{u} sont orthogonaux. On en déduit que \vec{n}_6 est un vecteur normal à la droite \mathcal{D} .

Barbazo, exercice 3 p. 258 Partie 1

③ $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite \mathcal{D}_1 . Soit, \vec{n}_1 un vecteur qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a, $\vec{n}_1 \cdot \vec{u}_1 = 1 \times (-2) + 2 \times 1 = 0$. Les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{u}_1 sont orthogonaux. On en déduit que \vec{n}_1 est un vecteur normal à la droite \mathcal{D}_1 .

$\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite \mathcal{D}_2 . Soit, \vec{n}_2 un vecteur qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a, $\vec{n}_2 \cdot \vec{u}_2 = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$. Les vecteurs \vec{n}_2 et \vec{u}_2 sont orthogonaux. On en déduit que \vec{n}_2 est un vecteur normal à la droite \mathcal{D}_2 .

$\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite \mathcal{D}_3 . Soit, \vec{n}_3 un vecteur qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Barbazo, exercice 3 p. 258 Partie 2

On a, $\vec{n}_2 \cdot \vec{u}_2 = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$. Les vecteurs \vec{n}_2 et \vec{u}_2 sont orthogonaux. On en déduit que \vec{n}_2 est un vecteur normal à la droite \mathcal{D}_2 .

$\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite \mathcal{D}_3 . Soit, \vec{n}_3 un vecteur qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a, $\vec{n}_3 \cdot \vec{u}_3 = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$. Les vecteurs \vec{n}_3 et \vec{u}_3 sont orthogonaux. On en déduit que \vec{n}_3 est un vecteur normal à la droite \mathcal{D}_3 .

$\vec{u}_4 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite \mathcal{D}_4 . Soit, \vec{n}_4 un vecteur qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On a, $\vec{n}_4 \cdot \vec{u}_4 = 1 \times 4 + 4 \times (-1) = 0$. Les vecteurs \vec{n}_4 et \vec{u}_4 sont orthogonaux. On en déduit que \vec{n}_4 est un vecteur normal à la droite \mathcal{D}_4 .

Barbazo, exercice 4 p. 258

4 1. L'équation cartésienne donnée est de la forme $ax + by + c = 0$, avec $a = 4$ et $b = -1$. Donc un vecteur normal à \mathcal{D} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, soit ici $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Barbazo, exercice 4 p. 258 Partie 2

2. L'équation cartésienne donnée est de la forme $ax + by + c = 0$, avec $a = -2$ et $b = 5$. Donc un vecteur normal à \mathcal{D} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
3. L'équation cartésienne donnée est de la forme $ax + by + c = 0$, avec $a = 1$ et $b = -1$. Donc un vecteur normal à \mathcal{D} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
4. $y = \frac{1}{3}x + 2 \Leftrightarrow -x + 3y - 6 = 0$, l'équation cartésienne est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = -1$ et $b = 3$. Donc un vecteur normal à \mathcal{D} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
5. $y = -3 \Leftrightarrow y + 3 = 0$, l'équation cartésienne est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = 0$ et $b = 1$. Donc un vecteur normal à \mathcal{D} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Barbazo, exercice 5 p. 258

5 1. Le vecteur \overrightarrow{AB} de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 - (-3) \\ -2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) .

Soit \vec{n} un vecteur qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 6 + 3 \times (-4) = 0$. Les vecteurs \vec{n} et \overrightarrow{AB} sont orthogonaux. On en déduit que \vec{n} est un vecteur normal à la droite (AB) .

2. Le vecteur \overrightarrow{AB} de coordonnées $\begin{pmatrix} -3 - 0 \\ -12 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) .

Soit \vec{n} un vecteur qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix}$.

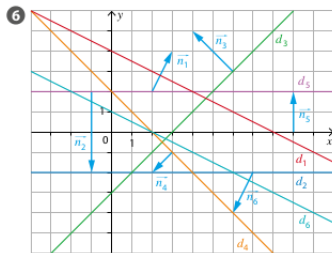
On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 11 \times (-3) - 3 \times (-11) = 0$. Les vecteurs \vec{n} et \overrightarrow{AB} sont orthogonaux. On en déduit que \vec{n} est un vecteur normal à la droite (AB) .

3. Le vecteur \overrightarrow{AB} de coordonnées $\begin{pmatrix} 3,23 - 1 \\ -4,5 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,23 \\ -1,5 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) .

Soit \vec{n} un vecteur qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,23 \end{pmatrix}$.

On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1,5 \times 2,23 + 2,23 \times (-1,5) = 0$. Les vecteurs \vec{n} et \overrightarrow{AB} sont orthogonaux. On en déduit que \vec{n} est un vecteur normal à la droite (AB) .

Barbazo, exercice 6 p. 258



Barbazo, exercice 8 p. 258

8 1. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite d et $\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

un vecteur directeur de la droite d' .

$\vec{u} \cdot \vec{u}' = 1 \times 3 + 3 \times 1 = 6 \neq 0$. Les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' ne sont pas orthogonaux, on en déduit que les droites d et d' ne sont pas perpendiculaires.

2. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite d et $\vec{u}' \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite d' .

$\vec{u} \cdot \vec{u}' = -1 \times 8 + 2 \times 4 = 0$. Les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' sont orthogonaux, on en déduit que les droites d et d' sont perpendiculaires.

3. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite d et $\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite d' .

$\vec{u} \cdot \vec{u}' = 1 \times 1 + 3 \times (-3) = -8 \neq 0$. Les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' ne sont pas orthogonaux, on en déduit que les droites d et d' ne sont pas perpendiculaires.

4. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite d et $\vec{u}' \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite d' .

$\vec{u} \cdot \vec{u}' = (1+\sqrt{3}) \times (1-\sqrt{3}) + 2 \times 1 = 1 - 3 + 2 = 0$. Les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' sont orthogonaux, on en déduit que les droites d et d' sont perpendiculaires.

Barbazo, exercice 10 p. 2598

10 1. $x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$; $y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-1+8}{2} = 3,5$.

Le point I a pour coordonnées $(3; 3,5)$.

2. Un vecteur normal à Δ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Par lecture des coefficients, $a = -3$ et $b = 2$.

\vec{n} , un vecteur normal à Δ , a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 8-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$

$-2 \times 2 - (-3) \times 9 = 23 \neq 0$. Les vecteurs \vec{n} et \overrightarrow{BC} ne sont pas colinéaires.

4. La droite médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu. Le vecteur \vec{n} normal à la droite Δ n'est pas colinéaire au vecteur \overrightarrow{BC} , vecteur directeur de la droite (BC) . On en déduit que les droites Δ et (BC) ne sont pas perpendiculaires et par conséquent que la droite Δ ne peut pas être la médiatrice du segment $[BC]$.

Barbazo, exercice 11 p. 259

11 1. $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -3-8 \\ 4-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \end{pmatrix}$

2. Les droites \mathcal{D} et (BC) étant perpendiculaires, un vecteur directeur de la droite (BC) est un vecteur normal de la droite \mathcal{D} .

Barbazo, exercice 11 p. 259 Partie 2

3. Le vecteur $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la droite D donc D admet une équation cartésienne de la forme $-11x + 9y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.

4. A appartient à $D \Leftrightarrow -11 \times x_A + 9 \times y_A + c = 0$
 $\Leftrightarrow -11 \times 8 + 9 \times (-5) + c = 0 \Leftrightarrow c = 133$
 $\Leftrightarrow c = 133$.

La droite D a pour équation cartésienne $-11x + 9y + 133 = 0$.

Barbazo, exercice 12 p. 259

- 12 Le vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ de la droite \mathcal{D} est un vecteur normal à la droite perpendiculaire à \mathcal{D} et passant par le point A . La droite perpendiculaire à \mathcal{D} et passant par le point A admet une équation cartésienne de la forme $-x + 3y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.
- A appartient à la droite perpendiculaire à \mathcal{D}
- $$\Leftrightarrow -x_A + 3 \times y_A + c = 0 \Leftrightarrow -1 + 3 \times 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = -8$$
- La droite perpendiculaire à \mathcal{D} et passant par le point A a pour équation cartésienne $-x + 3y - 8 = 0$.

Barbazo, exercice 13 p. 259

13 1. $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} et un vecteur normal pour la droite perpendiculaire à \mathcal{D} passant par B .

La droite perpendiculaire à \mathcal{D} et passant par le point B admet une équation cartésienne de la forme $-2x - 4y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.

B appartient à la droite perpendiculaire à \mathcal{D}

$$\Leftrightarrow -2x_B - 4 \times y_B + c = 0 \Leftrightarrow -2 \times 0 - 4 \times (-2) + c = 0 \\ \Leftrightarrow c = -8.$$

La droite perpendiculaire à \mathcal{D} et passant par le point B a pour équation cartésienne $-2x - 4y - 8 = 0$.

2. $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur pour la droite parallèle à \mathcal{D} passant par le point $C(3;3)$.

La droite parallèle à \mathcal{D} et passant par le point C admet une équation cartésienne de la forme $-4x + 2y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$. C appartient à la droite parallèle à \mathcal{D}

$$\Leftrightarrow -4x_C + 2 \times y_C + c = 0 \\ \Leftrightarrow -4 \times 3 + 2 \times 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = 6.$$

La droite parallèle à \mathcal{D} et passant par le point C a pour équation cartésienne $-4x + 2y + 6 = 0$.

Barbazo, exercice 15 p. 259

15 1. Dans le triangle ABC , la hauteur issue de A est la droite perpendiculaire à (BC) passant par A . Le vecteur $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la hauteur issue de A . La hauteur issue de A admet une équation cartésienne de la forme $-3x + 3y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.

A appartient à la hauteur $\Leftrightarrow -3 \times x_A + 3 \times y_A + c = 0$

$$\Leftrightarrow -3 \times 3 + 3 \times 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = 6.$$

La hauteur issue de A a pour équation cartésienne $-3x + 3y + 6 = 0$.

2. La médiatrice du segment $[AB]$ est la droite perpendiculaire à $[AB]$ passant par I milieu de $[AB]$.

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3 + 2}{2} = 2,5 \text{ et } y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 - 3}{2} = -1.$$

Le point I a pour coordonnées $(2,5; -1)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la médiatrice du segment $[AB]$. La médiatrice du segment $[AB]$ admet une équation cartésienne de la forme $-x - 4y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Barbazo, exercice 15 p. 259 Partie 2

$$\begin{aligned}I \text{ appartient à la médiatrice} &\Leftrightarrow -x_I - 4 \times y_I + c = 0 \\ &\Leftrightarrow -2,5 - 4 \times (-1) + c = 0 \\ &\Leftrightarrow c = -1,5.\end{aligned}$$

La médiatrice du segment $[AB]$ a pour équation cartésienne $-x - 4y - 1,5 = 0$.

3. Une figure sur logiciel de géométrie dynamique permet de vérifier les résultats des questions précédentes.

Barbazo, exercice 16 p. 259

- 16 1. Soit I le milieu de $[DD']$.
 $x_I = \frac{x_D + x_{D'}}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$ et $y_I = \frac{y_D + y_{D'}}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2$. Le point I a pour coordonnées $(4; 2)$.
2. $y = x - 2 \Leftrightarrow -x + y + 2 = 0$, l'équation cartésienne est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = -1$ et $b = 1$. Donc un vecteur normal à Δ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. $\overrightarrow{DD'} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 6-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$
 $2 \times 1 - (-1) \times 8 = 10 \neq 0$. Le vecteur normal à Δ et le vecteur $\overrightarrow{DD'}$ ne sont pas colinéaires.
4. On déduit de la question précédente que les droites Δ et (DD') ne sont pas perpendiculaires, or un point et son symétrique par rapport à une droite sont situés sur une droite perpendiculaire à l'axe de symétrie. Le point D ne peut donc pas être le symétrique du point D' par rapport à la droite d'équation $y = x - 2$.

Barbazo, exercice 17 p. 259

17 1. $\Delta : x - y - 2 = 0$ et $1 - (-1) - 2 = 0$, donc H appartient à la droite Δ .

2. Par lecture des coefficients a et b de l'équation cartésienne de Δ , on détermine les coordonnées d'un vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ normal à la droite Δ .

$$\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 1-4 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$-3 \times 1 - (-1) \times (-3) = -6 \neq 0$. Le vecteur normal à Δ et le vecteur \overrightarrow{AH} ne sont pas colinéaires, on en déduit que le vecteur \overrightarrow{AH} n'est pas un vecteur normal à Δ .

3. La droite (AH) n'est pas perpendiculaire à la droite Δ , le point H ne peut donc pas être le projeté orthogonal de A sur Δ .

Barbazo, exercice 33 p. 260

33 1. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 3 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-(-1))^2 = 3$

C'est l'équation d'un cercle de centre $\Omega(2;-1)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$.

2. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x-(-3))^2 + (y-2)^2 = 1$

C'est l'équation d'un cercle de centre $\Omega(-3;2)$ et de rayon $R = \sqrt{1} = 1$.

3. $(x-\sqrt{2})^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow (x-\sqrt{2})^2 + (y-0)^2 = 4$

C'est l'équation d'un cercle de centre $\Omega(\sqrt{2};0)$ et de rayon $R = \sqrt{4} = 2$.

4. $(x-\frac{1}{3})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 12 \Leftrightarrow (x-\frac{1}{3})^2 + (y-(-\frac{1}{2}))^2 = 12$

C'est l'équation d'un cercle de centre $\Omega(\frac{1}{3};-\frac{1}{2})$ et de rayon $R = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

—

Barbazo, exercice 34 p. 261

$$\textcircled{34} \text{ 1. } (x_B - 4)^2 + (y_B - 3)^2 = (-2 - 4)^2 + (1 - 3)^2 \\ = 36 + 4 = 40 \neq 3$$

Le point B n'appartient pas au cercle.

$$\text{2. } (x_B + 2)^2 + (y_B - 2)^2 = (-2 + 2)^2 + (1 - 2)^2 = 1. \text{ Le point } B \\ \text{appartient au cercle.}$$

$$\text{3. } x_B^2 + (y_B - 1)^2 = (-2)^2 + (1 - 1)^2 = 4. \text{ Le point } B \text{ appartient} \\ \text{au cercle.}$$

$$\text{4. } x_B^2 + 2x_B + y_B^2 - 2y_B = (-2)^2 + 2 \times (-2) + 1^2 - 2 \times 1 \\ = 4 - 4 + 1 - 2 = -1$$

Le point B appartient au cercle.

Barbazo, exercice 35 p. 261

35 1. a. $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$

b. $y^2 - 4y = (y-2)^2 - 4$

2. $x^2 - 2x + y^2 - 4y - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 - 9 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 14$

C'est l'équation d'un cercle de centre $\Omega(1; 2)$ et de rayon
 $R = \sqrt{14}$.

Barbazo, exercice 37 p. 261

- 37
- $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$
 - $(x+3)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x+3)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$
 - $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{16}{25}$
 - $(x-\sqrt{2})^2 + (y-2\sqrt{3})^2 = \sqrt{2}^2 \Leftrightarrow (x-\sqrt{2})^2 + (y-2\sqrt{3})^2 = 2$