Exercices sur les équations de droites et de cercles.

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1) Soit Δ la droite passant par $A(-5;2)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

Une équation de Δ est de la forme :

$$3x+5y+c=0$$

De plus $A(-5;2)$ appartient à Δ :

$$A(-5;2)\in\Delta \iff 3\times(-5)+5\times 2+c=0$$

$$\iff -5+c=0$$

$$A(-5;2)\in\Delta \iff c=5$$

On en déduit qu'une équation de Δ est :

$$\boxed{3x+5y+5=0}$$

2) Soit Γ le cercle d'équation :

$$x^2-4x+(y+3)^2=4$$

On met l'équation sous forme canonique en complétant le début d'identité remarquable $x^2 - 4x$:

$$x^2 - 4x = \underbrace{x^2 - 2 \times 2 \times x + 2^2}_{\Downarrow} - 2^2$$

$$x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$$

On a donc l'équivalence :

$$x^2 - 4x + (y+3)^2 = 4 \iff (x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 = 4$$

$$x^2 - 4x + (y+3)^2 = 4 \iff (x-2)^2 + (y+3)^2 = 8$$

Une équation du cercle Γ est : $\boxed{(x-2)^2 + (y+3)^2 = 8}$

Elle est de la forme $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

avec $a = 2$ $b = -3$ et $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Le cercle Γ a donc pour centre $\Omega(2;-3)$ et pour rayon $2\sqrt{2}$.

3) Pour déterminer l'intersection de la droite Δ et du cercle Γ on résout un système :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 = 8 & \text{équation de } \Gamma \\ 3x + 5y + 5 = 0 & \text{équation de } \Delta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{S} \begin{cases} (x-2)^2 + \left(-1 - \frac{3}{5}x + 3\right)^2 = 8 \\ y = -1 - \frac{3}{5}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{S} \begin{cases} x^2 - 4x + 4 + 4 - \frac{12}{5}x + \frac{9}{25}x^2 = 8 & (E_1) \\ y = -1 - \frac{3}{5}x & (E_2) \end{cases}$$

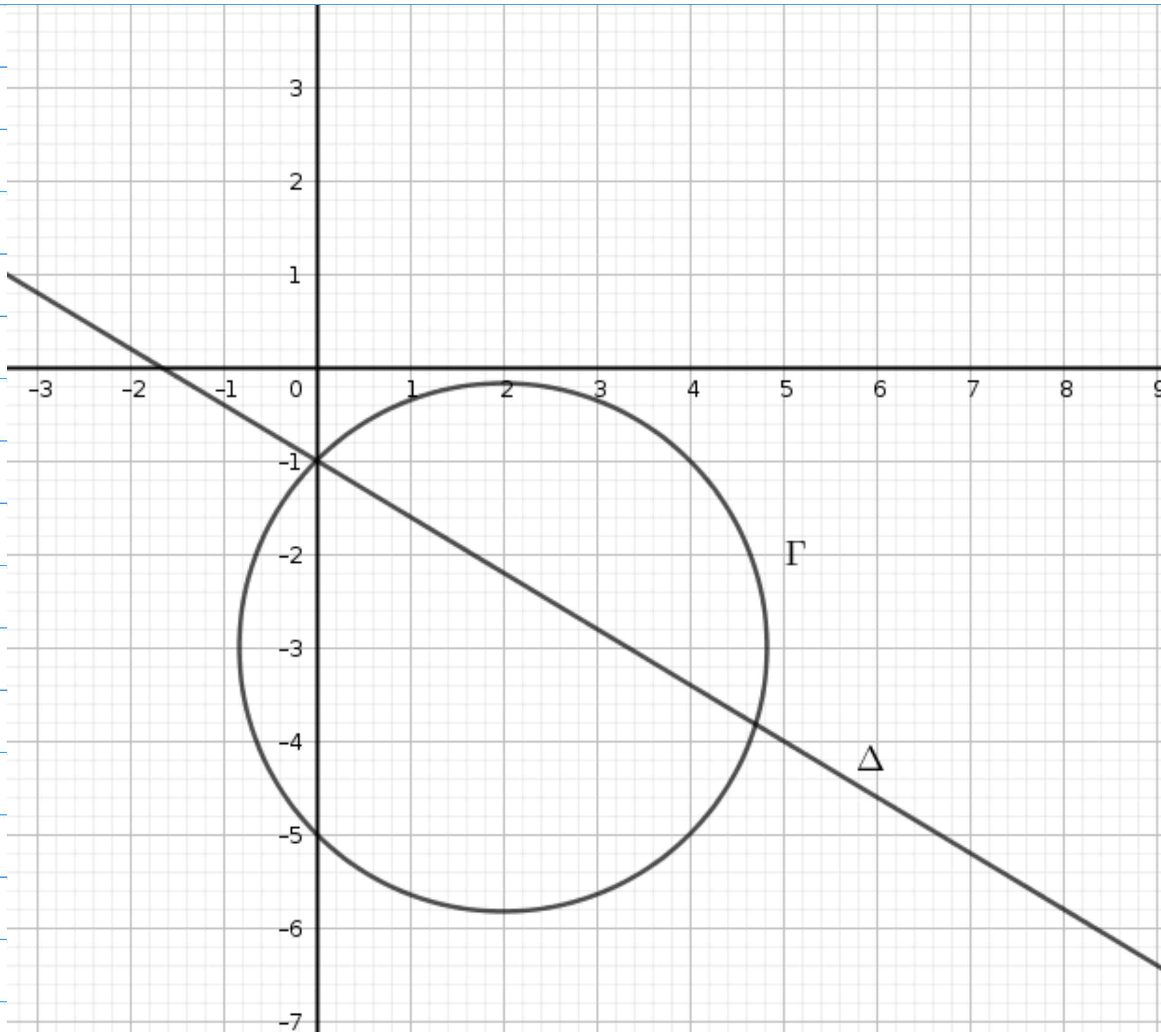
On résout d'abord l'équation du second degré (E_1) puis on fera la substitution dans (E_2).

Résolvons l'équation (E_1) :

$$(E_1) \Leftrightarrow \frac{34}{25}x^2 - \frac{32}{5}x = 0$$

$$(E_1) \Leftrightarrow 34x^2 - 160x = 0 \Leftrightarrow x(34x - 160) = 0$$

$$(E_1) \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{160}{34} \simeq 4{,}71$$



On revient au système $\mathcal{S}$ en calculant y par substitution :

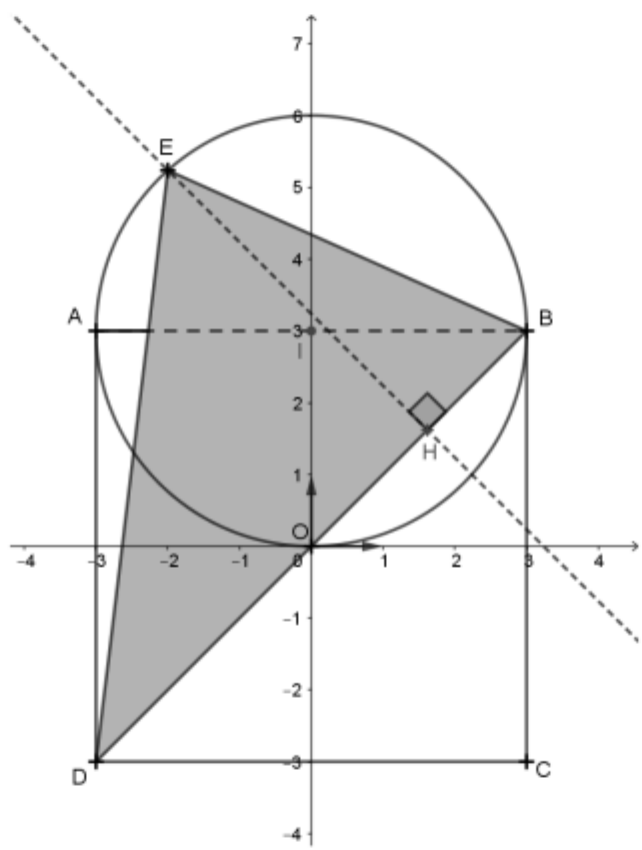
$$\mathcal{S} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 - \frac{3}{5} \times 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{160}{34} \\ y = -1 - \frac{3}{5} \times \frac{160}{34} = \end{cases}$$

$$\mathcal{S} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{160}{34} \\ y = -1 - \frac{3 \times 32}{34} = -\frac{130}{34} \end{cases}$$

Les coordonnées des deux points d'intersection de Γ et D sont donc :

$(0\,;-1)$ et $\left(\dfrac{160}{34}\,;-\dfrac{130}{34}\right)$

Exercice 2



Il a été représenté ci-dessus dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.
On donne les coordonnées des sommets du carré : $A(-3\,;\,3)$, $B(3\,;\,3)$, $C(3\,;\,-3)$, $D(-3\,;\,-3)$.
On considère le point $E\left(-2\,;3+\sqrt{5}\right)$.
On admettra que E est situé sur le cercle de diamètre $[AB]$.
On note I le milieu de $[AB]$.

1) Équation de la droite (BD) :

ABCD est un carré, donc ses diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires, donc $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à (BD).

Or on a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3-(-3) \\ -3-3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Une équation de (BD) est donc :

$$6x - 6y + c = 0$$

On calcule le paramètre c en exprimant que B (ou D) appartient à la droite (BD) :

$B(3;3) \in (BD) \iff 6\times3 - 6\times3 + c = 0$

$B(3;3) \in (BD) \iff c = 0$

Une équation de la droite (BD) est donc :

$$6x - 6y = 0 \iff y = x$$

2) Dans le triangle BDE la hauteur issue de E a pour vecteur normal $\overrightarrow{BD}$.

$$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-3-3\\-3-3\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}$$

Un vecteur normal à la hauteur issue de E dans le triangle BDE, nommons la $\mathcal{D}$, est plus simplement:

$$\vec{n} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{BD} \quad \text{avec } \vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Une équation de $\mathcal{D}$ est donc :

$$x + y + c = 0$$

On calcule c en exprimant que E appartient à $\mathcal{D}$:

$$E\left(-2\,;3+\sqrt{5}\right) \in \mathcal{D} \iff -2+3+\sqrt{5}+c=0$$
$$\iff c = -(1+\sqrt{5})$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Une équation de la droite } \mathcal{D} \text{ est donc :}\\ x+y-(1+\sqrt{5})=0\end{array}}$$

3) Le projeté orthogonal H du point E sur la droite (BD) est l'intersection de la hauteur $\mathcal{D}$ du triangle BDE qui est issue de B et de la droite (BD).

Pour déterminer les coordonnées de H on résout donc le système :

$$S \begin{cases} x + y - (1+\sqrt{5}) = 0 & \leftarrow \text{équation de la hauteur } \mathcal{D} \\ y = x & \leftarrow \text{équation de (BD)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + x - (1+\sqrt{5}) \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Les coordonnées de H projeté orthogonal de E sur (BD), sont donc :

$$\boxed{H\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} ; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

4) Calculons l'aire du triangle BDE.

On applique la formule :

$$\frac{\text{longueur de la base} \times \text{Hauteur}}{2}$$

La base est [BD] et la hauteur est [EH]

On a $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BD} = 36+36=72 = BD^2$

donc $\boxed{BD=\sqrt{72} = \sqrt{36\times 2} = 6\sqrt{2}}$

De même on a $E\left(-2\,;\,3+\sqrt{5}\right)$

$H\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,;\,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

donc $\overrightarrow{EH}\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\,;\,-1\right)$

Donc on a $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{EH} = \left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1^2$

$\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{EH} = \dfrac{25+10\sqrt{5}+5}{4} + 1$

$\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{EH} = \dfrac{17}{2} + \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

donc $\boxed{EH = \sqrt{\dfrac{17+5\sqrt{5}}{2}}}$

On peut maintenant calculer l'aire du triangle BDE :

$$\frac{1}{2}\times BD \times EH = \frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{17+5\sqrt{5}}{2}}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\times BD \times EH = 3\sqrt{17+5\sqrt{5}}}$$

5) Calculons $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE}$:

$\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}3-(-3)\\3-(-3)\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-2+3\\3+\sqrt{5}+3\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1\\6+\sqrt{5}\end{pmatrix}$

On a :

$$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE} = 6\times 1 + 6\times(6+\sqrt{5})$$

$$\boxed{\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE} = 42+6\sqrt{5}}$$

6) On a $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DE} = 1^2 + (6+\sqrt{5})^2$

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DE} = 1+6^2+12\sqrt{5}+\sqrt{5}^2$$

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DE} = 42 + 12\sqrt{5}$$

On a donc $DE^2 = 42 + 12\sqrt{5}$

donc $\boxed{DE = \sqrt{42 + 12\sqrt{5}}}$

D'après la propriété du cosinus :

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = DB \times DE \times \cos(\widehat{BDE})$$

donc $\cos(\widehat{BDE}) = \dfrac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE}}{DB \times DE}$

donc $\cos(\widehat{BDE}) = \dfrac{42 + 6\sqrt{5}}{6\sqrt{2} \times \sqrt{42 + 12\sqrt{5}}} \simeq 0{,}79$

donc $\boxed{\widehat{BDE} \simeq 38°}$