7 Calcul vectoriel et produit scalaire

1 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$= 5 \times 10 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 25$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$, car le triangle ABC est rectangle en B et les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = CA \times CB \times \cos(\widehat{ACB})$

Comme ABC est rectangle en B,

alors $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

et $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 100 - 25 = 75$,

donc $BC = 5\sqrt{3}$.

Ainsi $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = 10 \times 5\sqrt{3} \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 75$.

2 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$\Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$

a. $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{1}{6}$ donc $\widehat{BAC} \approx 80°$.

b. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = 4$, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -4$ et

$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{-2}{5}$, donc $\widehat{BAC} \approx 114°$.

3 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$, car B est le projeté orthogonal de C sur (AB). Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB^2 = 25$.

On note I le milieu du segment $[BC]$.

$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AB}$, car I est le projeté orthogonal de O sur (BC).

Donc $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC} = BO \times BC = 3 \times 1{,}5 = 4{,}5$.

On note J le milieu du segment $[AB]$.

$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{AB}$, car J est le projeté orthogonal de O sur (AB).

Donc $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AB} = -OD \times AB = -5 \times 2{,}5 = -12{,}5$.

4 **a.** $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2 \times 1 + (-3) \times 2 = -8$

et $\|\vec{u}\|^2 = (-2)^2 + (-3)^2 = 13$.

b. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -4 \times 9 + 6 \times 6 = 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux et les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

5 **a.** $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = -36$

b. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\|^2 = 36$

c. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

$= \frac{1}{2}(25 - 16 - 81) = -36$

d. Les vecteurs $\vec{u} + \vec{w}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, donc :

$(\vec{u} + \vec{w})\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{w}\cdot\vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} + 5 = 0 \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = -5$

6 **a.** Comme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$,

alors $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 = AC^2 = 64$.

Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2)$

$= \frac{1}{2}(64 - 36 - 16) = 6$.

b. $\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + \|\overrightarrow{AD}\|^2$

$= 36 - 12 + 16 = 40$

Comme $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$,

alors $BD^2 = \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\|^2 = 40$ et $BD = 2\sqrt{10}$.

7 **a.** D'après le théorème de la médiane,

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = MI^2 - 36$.

b. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 64 \Leftrightarrow MI^2 - 36 = 64 \Leftrightarrow MI^2 - 100$

$\Leftrightarrow MI = 10$.

Donc cet ensemble est le cercle de centre I et de rayon 10.

8 **a.** D'après le théorème d'Al-Kashi, on a :

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$

$= 25 + 64 - 80\cos(45°) = 89 - 40\sqrt{2}$.

Donc $AC = \sqrt{89 - 40\sqrt{2}}$.

b. D'après le théorème d'Al-Kashi, on a :

$DF^2 = DE^2 + EF^2 - 2DE \times EF \times \cos(\widehat{DEF})$

$\Leftrightarrow 64 = 100 + 25 - 100\cos(\widehat{DEF})$

$\Leftrightarrow -61 = -100\cos(\widehat{DEF})$.

Donc $\cos(\widehat{DEF}) = \frac{61}{100}$ et $\widehat{DEF} \approx 52°$ au degré près.