QCM

1) (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = e^{4n}$$

$$u_n = (e^4)^n = q^n \text{ avec } q = e^4$$

Donc (u_n) géométrique de raison e^4

2) (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{-2n}$,

$$u_n = (e^{-2})^n = q^n$$

(u_n) géométrique de raison e^{-2}

et de premier terme $u_0 = e^{-2\times 0}$

$$u_0 = e^0 = 1$$

3) On suppose (u_n) croissante à partir du rang 0 alors :

* $u_0 \le u_1$

*

Condition suffisante | Condition nécessaire

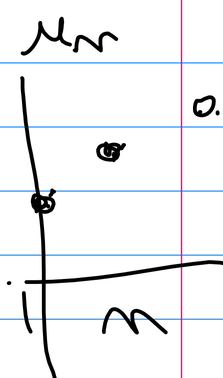
$$\underbrace{(u_n) \text{ est croissante}}_{\text{Vrai}} \xRightarrow{\text{implication}} \underbrace{u_0 \le u_1}_{\text{Vrai}}$$

La réciproque de cette implication est fausse.

* $u_n \le u_{n+1}$ et $u_{n+1} \le u_{n+1+1}$

$u_n \le u_{n+1}$ et $u_{n+1} \le u_{n+2}$

donc $u_n \le u_{n+2}$

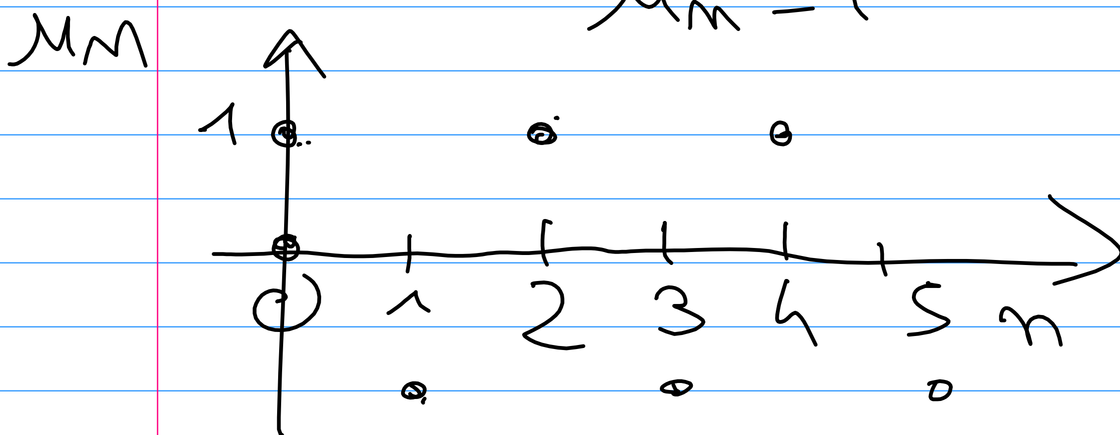


Rque : Si (u_n) croissante à partir du rang 0, alors pour tous entiers $0 \le p \le q$

on a $u_p \le u_q$

4) (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par :

$$u_n = (-1)^n$$



Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n = u_{n+2}$$

mais $u_n > u_{n+1}$ si n : pair

ou $u_n < u_{n+1}$ si n impair

Question 5 : (u_n) définie par

$u_0 = -1000$ et $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$

$u_1 = -1000(1-(-1000)) = -1001000$

$u_2 = -1001000(1+1001000) = -1{,}002 \times 10^{12}$

$u_3 < u_2$

On peut conjecturer que la suite est décroissante.
(on peut calculer les termes avec la machine)...

Comparons u_n et u_{n+1} pour tout entier $n \geq 0$:

On étudie le signe de leur différence :

$$u_{n+1} - u_n = u_n(1 - u_n) - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = -u_n^2$$

$u_n^2 \geq 0$ donc $-u_n^2 \leq 0$

donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$

donc $u_{n+1} \leq u_n$

La suite est donc décroissante à partir du rang 0.

Cours,

Capacité 2 :

(v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$v_n = 1 + 0{,}2^n = 1 + \left(\frac{2}{10}\right)^n$$

- $v_0 = 1 + 0{,}2^0 = 1 + 1 = 2$

$v_1 = 1 + 0{,}2^1 = 1{,}2$

$v_2 = 1 + 0{,}2^2 = 1{,}04$

$v_3 = 1 + 0{,}2^3 = 1{,}008$

On conjecture que (v_n) est décroissante à partir du rang 0.

Pour tout entier $n \geq 0$:

$$v_{n+1} - v_n = 1 + 0{,}2^{n+1} - (1 + 0{,}2^n)$$

$$v_{n+1} - v_n = 0{,}2^{n+1} - 0{,}2^n$$

$$v_{n+1} - v_n = 0{,}2^n \times (0{,}2 - 1)$$

$$v_{n+1} - v_n = \underbrace{0{,}2^n \times (-0{,}8)}_{\text{négatif}}$$

donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$

$$v_{n+1} \leq v_n$$

La suite (v_n) est donc décrois-
-sante.

- <u>Exemple suivant</u> :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, :

$$v_n = \frac{n+2}{n+3} = f(n)$$

avec f définie sur $[0;+\infty[$

par $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$

<u>Méthode 1</u> : On détermine le sens de variation de la fonction f dérivable sur $[0;+\infty[$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$u(x) = x+2$ $\quad$ $v(x) = x+3$

$u'(x) = 1$ $\quad$ $v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{1 \times (x+3) - 1 \times (x+2)}{(x+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$$

Pour tout $x \geq 0$; $f'(x) > 0$
donc f croissante sur $[0 ; +\infty[$
donc la suite $v_n = f(n)$ est crois-
-sante à partir du rang 0.

3) (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = -4 \\ v_{n+1} = v_n + \dfrac{2}{n^2+1} \end{cases}$

b) Pour tout entier $n \geq 0$:

$$v_{n+1} = v_n + \frac{2}{n^2+1}$$

donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2}{n^2+1}$

or $2 > 0$ et $n^2+1 > 0$

donc $v_{n+1} - v_n > 0$

donc $v_{n+1} > v_n$

donc (v_n) est croissante.

Capacité 3 :

1) Pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{2^n}{n}$$

$u_1 = 2$ $\quad u_2 = 2$ $\quad u_3 = \frac{8}{3}$

$u_4 = \frac{16}{4} = 4 \ldots$

On conjecture que (u_n) est croissante

$u_{n+1} - u_n \geq 0 \Updownarrow$ $\qquad u_{n+1}$

u_n $\qquad$ Si $u_n \geq 0$

$\times \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$

On calcule le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$ et $u_n = \frac{2^n}{n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{2^n \times 2^1}{2^n} \times \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2^1 \times \frac{n}{n+1} = \frac{2n}{n+1}$$ ≤ 1 ? ou ≥ 1 ?

Si $n \geq 1$

alors $n + n \geq n + 1$

$2n \geq n+1$

et donc $\frac{2n}{n+1} \geq 1$

On a donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$

de plus $u_n > 0$, donc $u_{n+1} \geq u_n$

donc (u_n) croissante à partir du rang 1