Automatisme 6 :

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times 6 + 2\times 4 \neq 0$

$\vec{u}\cdot\vec{v} \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pas orthogonaux

$\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\15\end{pmatrix}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -5\times 6 + 2\times 15$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

Automatisme 7 :

$A(1;1)$ $B(4;5)$ $C(0;4)$ $D(5;0)$

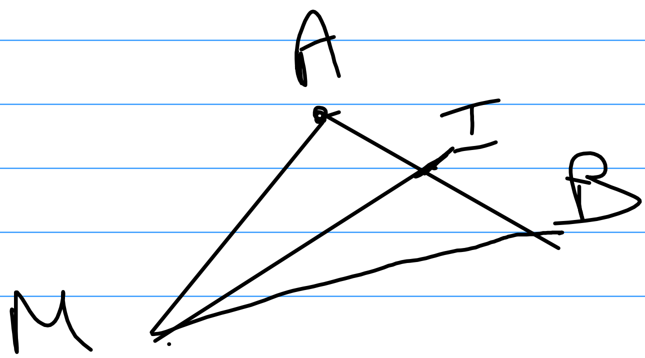
donc $\overrightarrow{AB}(4-1;5-1)$ et $\overrightarrow{CD}(5-0;0-4)$

$\overrightarrow{AB}(3;4)$ et $\overrightarrow{CD}(5;-4)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 3\times 5 + 4\times(-4) = -1$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} \neq 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas orthogonaux donc (AB) et (CD) ne sont pas perpendiculaires.

Application du théorème de la médiane :



Propriété de la médiane :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

n° 43 p. 22 ..

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ repère orthonormé

$A(5;-2)$ et $B(-1;3)$

Soit Γ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -6$

Soit I le milieu de $[AB]$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -6 \iff MI^2 - \frac{AB^2}{4} = -6$$

Thm de la médiane

(*) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -6 \iff MI^2 = \frac{AB^2}{4} - 6$

On peut calculer AB^2.

$$AB^2 = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}^2$$

mais aussi :

$$AB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ 3-(-2) \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

donc $AB^2 = (-6)^2 + 5^2 = 61$

(*) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -6 \iff MI^2 = \frac{61}{4} - 6$

$$\iff MI^2 = \frac{37}{4}$$

MI est une longueur donc $MI \geq 0$

$$\iff MI = \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2}$$

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -6$ est le cercle de centre I milieu [AB] et de rayon $\frac{\sqrt{37}}{2}$

I a pour coordonnées :

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

$$I\left(2 ; \frac{1}{2}\right)$$

Capacité 1

Soit [AB] un segment de longueur et I son milieu

théorème de la médiane

1)

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 2 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 2$$

Or I milieu de [AB]

donc $AB = 2AI$.

On a donc :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 2 \iff MI^2 - \frac{(2AI)^2}{4} = 2$$

$$\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 2 \iff MI^2 - AI^2 = 2}$$

2) $AB = 4$ donc $AI = 2$

Ainsi :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 2 \iff MI^2 - 2^2 = 2$$

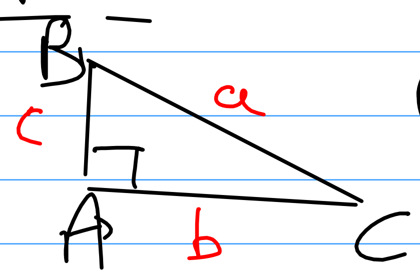
$$\iff MI^2 = 2^2 + 2 = 6$$

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 2 \iff MI = \sqrt{6}$$

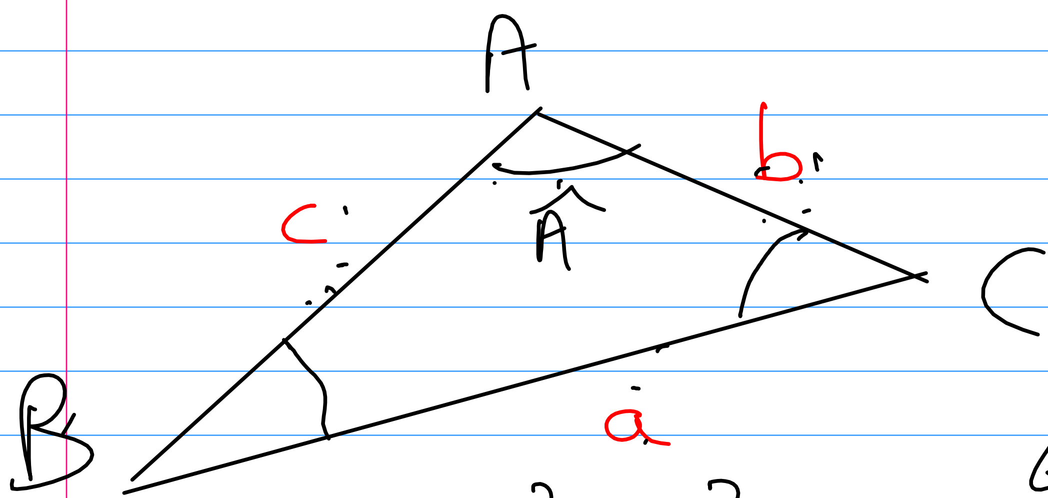
L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 2$ est donc le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{6}$.

Théorème d'Al-Kashi

<u>Rappel</u> : théorème de Pythagore



ABC rectangle en A $\iff a^2 = b^2 + c^2$



$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \hat{A}$$

Si $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ radians on retrouve Pythagore

<u>Preuve d'Al. Kashi</u> :

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$$

$$= \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA} + 2\,\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$$

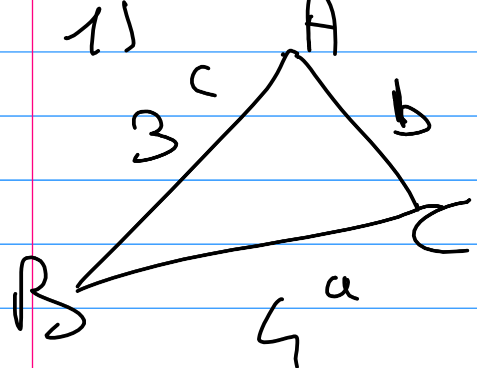
$$BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2\,AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

$a^2 = c^2 + b^2 - 2\,bc \times \cos \widehat{A}$

Capacité 2 :

1)



$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2\cos(\widehat{ABC}) \times BA \times BC$

$AC^2 = 9 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos(50)$

$AC^2 = 25 - 24 \times \cos(50)$

$AC = \sqrt{25 - 24 \times \cos(50)} \approx 3{,}1$.