Séance du 28/05/2020

Exercice 1 n-251

1) Une équation de la droite est

$y = 0{,}5x + 1 \iff \underbrace{0{,}5}_{a}x \underbrace{-1}_{b}y + 1 = 0$

$a = 0{,}5 \quad b = -1$

Un vecteur normal de $\mathcal{D}$ est $\vec{n}(0{,}5 ; -1)$

Sinon il suffit de trouver un vecteur directeur $\vec{u}\left(\underset{-b}{2} ; \underset{a}{1}\right)$ par exemple.

On en déduit un vecteur normal

$\vec{n_1}\left(\underset{a}{1} ; \underset{b}{-2}\right)$ qui vérifie $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$

2) Si $\mathcal{D}$ passe par $A(5;1)$
et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

Un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

car si $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ vecteur directeur alors $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vecteur normal.

3) Si une équation de $\mathcal{D}$ est

$$\underbrace{5}_{a}x \underbrace{-4}_{b}y + 6 = 0$$

, d'après le cours, un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

4) Une équation réduite de $\mathcal{D}$ est $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$.

Un vecteur directeur est :

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ avec m coefficient directeur

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

Un vecteur normal est :

$\vec{n}\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

ou encore $\vec{n_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Si on fixe à 1 la première coordonnée du vecteur normal et qu'on note $m \neq 0$ le coeffi-cient directeur.

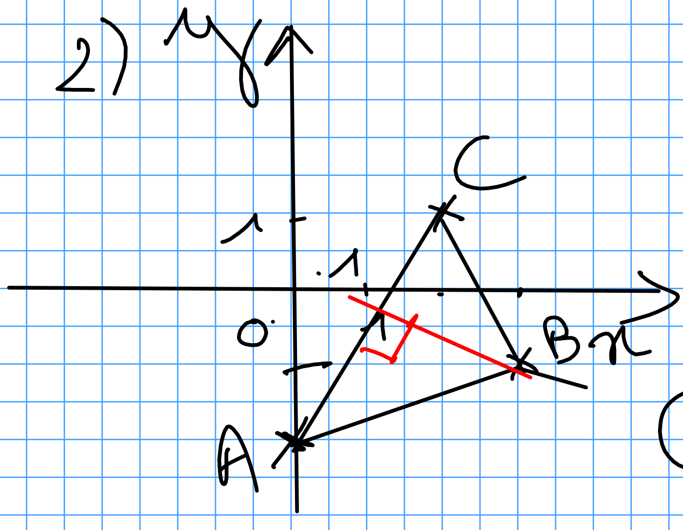
On doit avoir $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ et $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$

et $\vec{u}\cdot\vec{n_1} = 0$.

Or $\vec{u}\cdot\vec{n_1} = 0 \iff 1\times 1 + m\times m' = 0$

$\iff m' = -\dfrac{1}{m}$

Rque : Si $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ avec $m \neq 0$ est vecteur directeur alors un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{m}\end{pmatrix}$

2) 

Soit Δ la hauteur issue de B dans le triangle ABC

(C_1) Δ passe par B

(C_2) $\Delta \perp (AC)$ donc Δ a pour vecteur normal $\vec{AC}$

(C2) Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC}\,(x_C - x_A \,;\, y_C - y_A)$$

$$\overrightarrow{AC}\,(2-0 \,;\, 1-(-2))$$

$$\overrightarrow{AC}\,(\underset{a}{2} \,;\, \underset{b}{3})$$

$\overrightarrow{AC}$ est vecteur normal à Δ donc : une équation de (AC) est de la forme : $2x+3y+c=0$

(C1) Δ passe par le point $B(3;-1)$ donc $2\times 3+3\times(-1)+c=0$

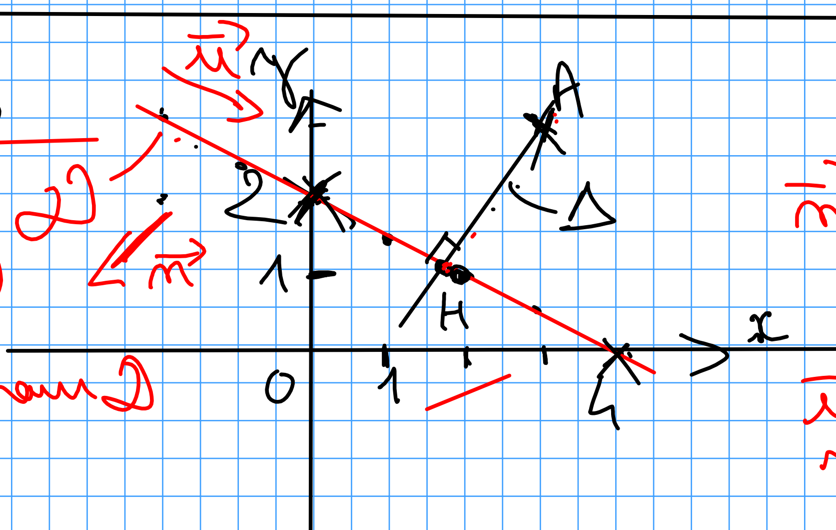
$$\Leftrightarrow c=-3$$

On conclut qu'une équation de la hauteur Δ est :

$$\boxed{2x+3y-3=0}$$

Capacité 6

$\mathcal{D} : x+2y-4=0$



$\vec{n}$ normal à $\mathcal{D}$

$\vec{u}$ directeur pour $\mathcal{D}$

$\vec{n}$ vecteur directeur pour Δ

$\vec{u}$ vecteur normal à Δ

On veut tracer $\mathcal{D}$:

$x+2y-4=0 \iff x-4=-2y$

$a=1$, $b=2$

$\iff -\frac{x}{2}+2=y$

$p=2$ ordonnée à l'origine

$m=-\frac{1}{2}$ coefficient directeur

$\vec{u}\,(-b;a)$ $\quad \vec{u}\,(-2;1)$

ou $\vec{u_1}\,(1;m)$ $\quad \vec{u_1}\,(1;-\frac{1}{2})$

On recherche une équation de la droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par A :

C_1 Δ passe par $A(3;3)$

C_2 Δ perpendiculaire à $\mathcal{D}$

On exploite d'abord la condition C_2 :

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est un vecteur normal de Δ.

$\mathcal{D}$ a pour équation $x+2y-4=0$

donc a pour vecteur directeur $\vec{u}\,(-b;a)$

avec $a=1$ et $b=2$ donc $\vec{u}\,(-2;1)$

C'est un vecteur normal pour Δ

donc une équation de Δ est de la forme

$a'x+b'y+c=0$ avec $a'=-2$ et $b'=1$

donc $-2x + y + c = 0$

On détermine c avec la condition (C1)

Le point $A(3;3)$ appartient à Δ

donc $-2\times 3 + 3 + c = 0$

$\iff c = 3$

$$\boxed{\text{Une équation de } \Delta \text{ est donc de la forme } -2x + y + 3 = 0}$$

2) Le projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{D}$ est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et Δ ;

Ses coordonnées sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ -2x + y + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 4 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$$

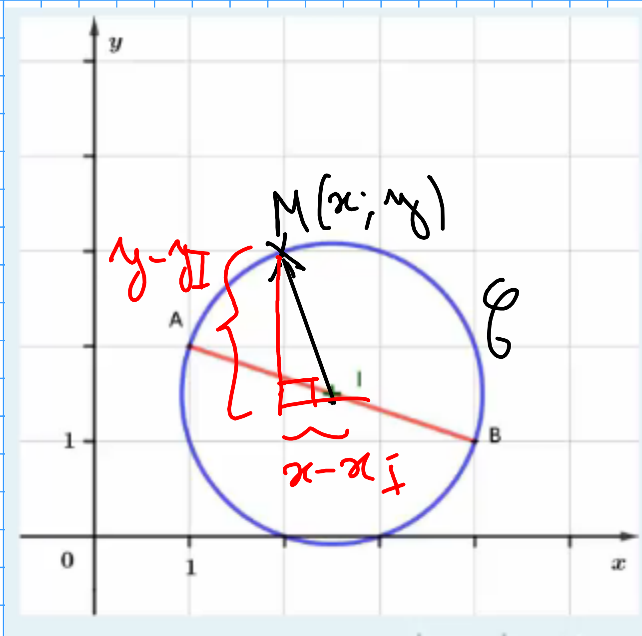
substitution

$$\iff \begin{cases} x + 2(2x-3) = 4 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 4x - 6 = 4 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5x = 10 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 2\times 2 - 3 = 1 \end{cases}$$

Les coordonnées de H sont donc :

$H(2\,;1)$



$\mathscr{C}$ cercle de centre I et de rayon R

$$M(x;y) \in \mathscr{C} \iff IM = R$$
$$\iff \underbrace{IM^2}_{} = R^2$$

On $IM^2 = \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IM}$ avec $\overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} x - x_I \,; y - y_I \end{pmatrix}$

$$IM^2 = (x - x_I)^2 + (y - y_I)^2$$

$$M(x;y) \in \mathscr{C} \iff \underbrace{(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = R^2}_{\text{équation du cercle}}$$

$\boxed{\text{Capacité 7}}$ Dans un repère orthonormé soit $A(2;1)$ et $B(5;3)$

1) Γ cercle de diamètre $[AB]$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

ou $AB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{AB}\left(\underset{x_B - x_A}{3} ; \underset{y_B - y_A}{2}\right)$

donc $AB^2 = 3^2 + 2^2 = 13$

$AB = \sqrt{13}$

donc le rayon est $\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

Coordonnées du centre I qui est le milieu de $[AB]$:

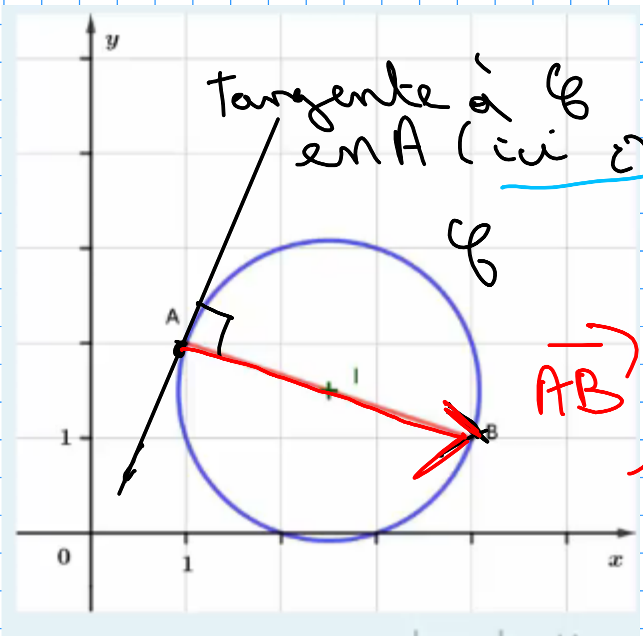
$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$

$x_I = \frac{7}{2}$ et $y_I = 2$

$I\left(\frac{7}{2} ; 2\right)$

Une équation du cercle de diamètre $[AB]$ est donc $(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$

$$\iff \boxed{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{13}{4}}$$



La tangente T au cercle $\mathcal{C}$ en A a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}(3;2)$ donc une équation de T est de la forme :

$$ax+by+c=0 \quad \text{avec } a=3,\ b=2$$

$$3x+2y+c=0$$

$\hookrightarrow$??

Pour calculer c on utilise le point A (2;1) qui appartient à T :

$$3\times 2+2\times 1+c=0$$

$$\iff c=-8$$

Une équation de la tangente est donc :

$$3x + 2y - 8 = 0$$

3) Γ d'équation $\left(x - \frac{7}{2}\right) + (y-2)^2 = \frac{13}{4}$

Δ d'équation $x + y = 6$

Pour déterminer l'intersection de Δ et Γ on résout le système :

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{13}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x \\ \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (6 - x - 2)^2 = \frac{13}{4} \end{cases}$$

on résout par substitution

à terminer voir le corrigé dans le diaporama avec les corrigés des exemples du cours.