Séance du lundi 15/06/2020

Exercice 1 type E3C

Exercice 3 (5 points)

On dispose d'un paquet de cartes contenant un nombre identique de cartes de la catégorie « Sciences » et de la catégorie « Économie ». Une question liée à un de ces deux thèmes figure sur chaque carte.
Les cartes sont mélangées et on en tire une au hasard dans le paquet. Ensuite, on essaye de répondre à la question posée.

Un groupe de copains participe à ce jeu. Connaissant leurs points forts et leurs faiblesses, on estime qu'il a :

- 3 chances sur 4 de donner la bonne réponse lorsqu'il est interrogé en sciences ;
- 1 chance sur 8 de donner la bonne réponse lorsqu'il est interrogé en économie.

On note S l'événement « La question est dans la catégorie Sciences » et
B l'événement « La réponse donnée par le groupe est bonne ».

Partie A :

1) Calculer P(B $\cap$ S).
2) Déterminer la probabilité que le groupe de copains réponde correctement à la question posée.
3) Les événements S et B sont-ils indépendants ?

Partie B :
Pour participer à ce jeu, on doit payer 5 € de droit d'inscription.
On recevra :

- 10 € si on est interrogé en sciences et que la réponse est correcte ;
- 30 € si on est interrogé en économie et que la réponse est correcte ;
- rien si la réponse donnée est fausse.

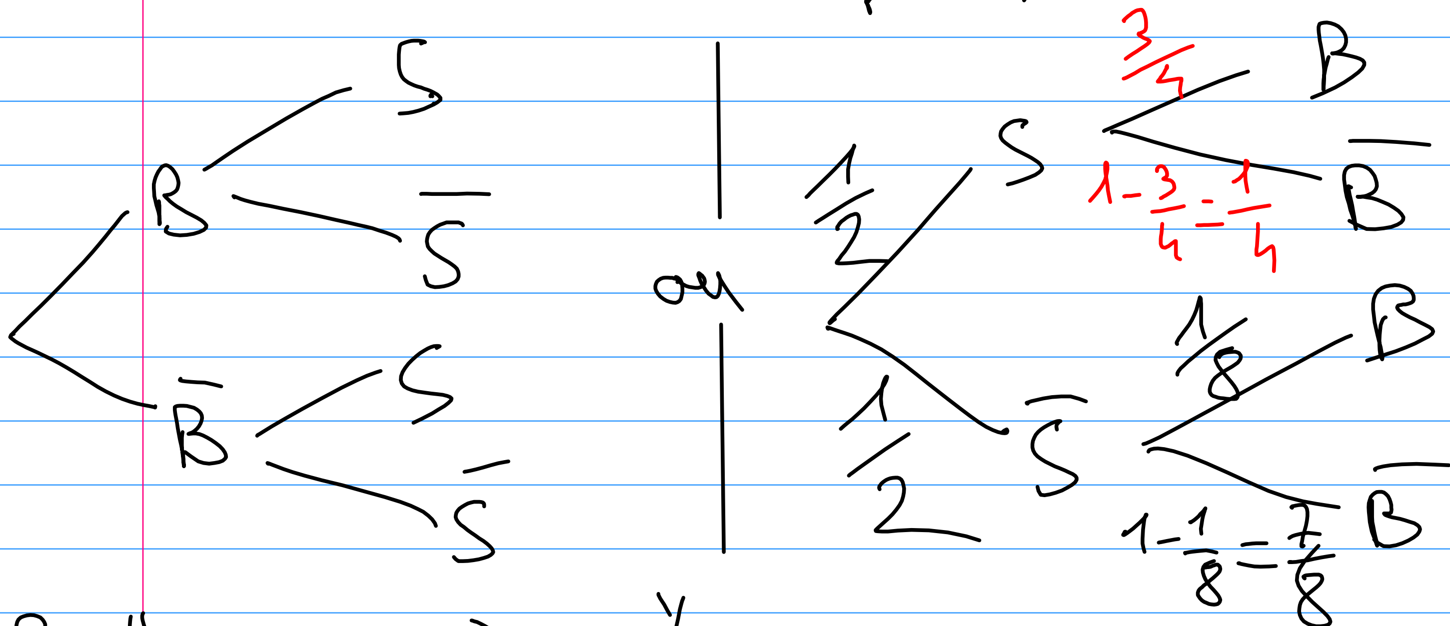
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie jouée, associe son gain. On appelle gain la différence en euros entre ce qui est reçu et les 5 € de droit d'inscription.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Que retourne la fonction Jeu écrite ci-dessous en langage Python
   avec les listes : L = [-5 ; 5 ; 25] et G = [0,5625 ; 0,375 ; 0,0625] ?

```python
def Jeu(L,G):
    n=len(L)
    E=0
    for i in range(n):
        E = E + L[i]*G[i]
    return(E)
```

Partie A :

1) On modélise la situation par un arbre de probabilités :



B : "Bonne réponse"

S : "Science"

$\overline{S}$: "Économie"

Données de l'énoncé :

On dispose d'un paquet de cartes contenant un nombre identique de cartes de la catégorie « Sciences » et de la catégorie « Économie ». Une question liée à un de

$$P(S) = P(\overline{S}) = \frac{1}{2}$$

une condition

- 3 chances sur 4 de donner la bonne réponse lorsqu'il est interrogé en sciences ;
- 1 chance sur 8 de donner la bonne réponse lorsqu'il est interrogé en économie.

→ une condition

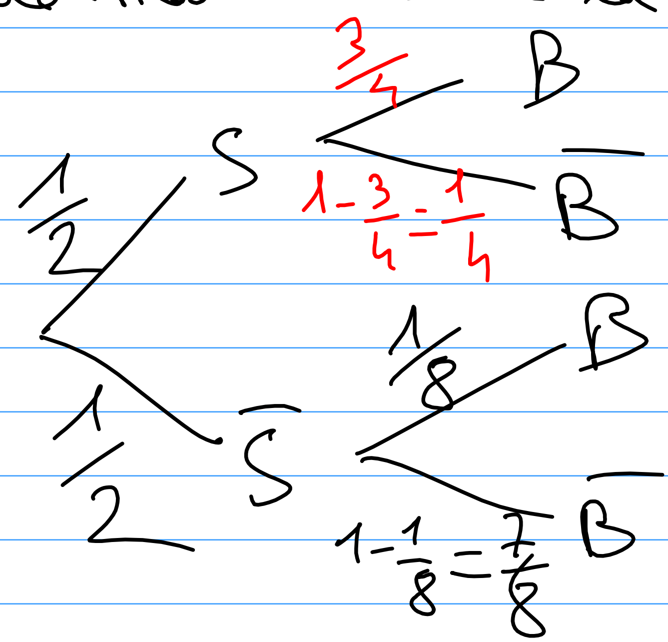
$\frac{3}{4} = \cancel{P(S \cap B)}$ Non !

mais $\frac{3}{4} = P_S(B)$

il s'agit d'une probabilité conditionnelle !

Il s'agit aussi d'une probabilité conditionnelle, notée $\frac{1}{8} = P_{\bar{S}}(B)$

L'arbre modélisant la situation est donc :



On a donc :

$$P(B\cap S) = P(S\cap B) = P(S)\times P_S(B)$$

$$\boxed{P(B\cap S) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4} = \frac{3}{8}}$$

2) $B = (B\cap S) \cup (B\cap \bar{S})$

D'après la formule des probabilités totales :

$P(B) = P(S \cap B) + P(\bar{S} \cap B)$

$P(B) = P(S) \times P_S(B) + P(\bar{S}) \times P_{\bar{S}}(B)$

$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8} + \frac{1}{16}$

$\boxed{P(B) = \frac{7}{16}}$

3) Les évènements B et S sont-ils indépendants ?

B et S sont indépendants ssi

$P(B \cap S) = P(B) \times P(S)$

ce qui est équivalent à :

$\begin{cases} P_S(B) = P_{\bar{S}}(B) = P(B) \\ \text{ou encore} \\ P_B(S) = P_{\bar{B}}(S) = P(S) \end{cases}$

Ici $P(B) \times P(S) = \frac{7}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{32}$

alors que $P(B \cap S) = \frac{3}{8} = \frac{12}{32}$

Donc $P(B \cap S) \neq P(B) \times P(S)$

Donc B et S ne sont pas indépendants.

Plus simplement, d'après l'énoncé $P_S(B) = \frac{3}{4}$ et $P_{\bar{S}}(B) = \frac{1}{8}$

donc $P_S(B) \neq P_{\bar{S}}(B)$ donc B et S ne sont pas indépendants.

Partie B

synonyme : mise

Partie B :

Pour participer à ce jeu, on doit payer 5 € de droit d'inscription.

On recevra :

- 10 € si on est interrogé en sciences et que la réponse est correcte ;
- 30 € si on est interrogé en économie et que la réponse est correcte ;
- rien si la réponse donnée est fausse.

gain

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie jouée, associe son gain. On appelle gain la différence en euros entre ce qui est reçu et les 5 € de droit d'inscription.

Gain algébrique X

X s'obtient en retranchant la mise au gain :

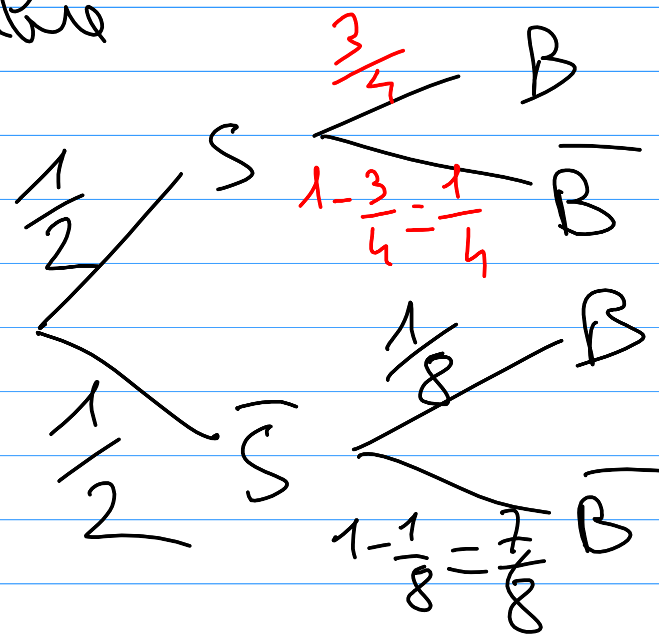
$\boxed{\text{Gain algébrique} = \text{Gain} - \text{Mise}}$

1) Loi de probabilité de X.

- Valeurs possibles pour X

Mise	Gain	Gain algébrique X
5	10	$10-5=5$
5	30	$30-5=25$
5	0	$0-5=-5$

On utilise l'arbre de la partie A



$X=5$

$X=-5$

$X=25$

$X=-5$

$\underbrace{S}\ \cap\ \underbrace{B}$

- 10 € si on est interrogé en sciences et que la réponse est correcte ; $\Leftrightarrow X=5$

intersection

$\Leftrightarrow B\cap S$ dans partie A

On a donc $P(X=5)=P(B\cap S)=\frac{3}{8}$

$X=30-5=25 \qquad \overline{S} \qquad \cap \qquad B$

- 30 € si on est interrogé en économie et que la réponse est correcte ; $\iff X = 25$

$\iff \overline{S} \cap B$

donc $P(X=25) = P(\overline{S} \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$

On peut calculer la dernière probabilité $P(X=-5)$ par complémentaire :

$$1 = P(X=25) + P(X=5) + P(X=-5)$$

donc $1 - P(X=25) - P(X=5) = P(X=-5)$

$$1 - \frac{1}{16} - \frac{3}{8} = P(X=-5)$$

$$\frac{7}{16} = P(X=-5)$$

Loi de probabilité de X :

k	-5	5	25
$P(X=k)$	$\frac{7}{16}$ $0{,}5625$	$\frac{3}{8}$ $0{,}375$	$\frac{1}{16}$ $0{,}0625$

2)

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Que retourne la fonction Jeu écrite ci-dessous en langage Python avec les listes : L = [-5 ; 5 ; 25] et G = [0,5625 ; 0,375 ; 0,0625] ?

variable E accumulateur qui est retournée

```python
def Jeu(L,G):
    n=len(L)
    E=0
    for i in range(n):
        E = E + L[i]*G[i]
    return(E)
```

Calcul effectué par cette boucle ?

Valeur de i	Valeur de E
0	L[0]*G[0] = $-5\times0{,}5625$
1	L[0]*G[0] + L[1]*G[1] = $-5\times0{,}5625+5\times0{,}375$
2	L[0]*G[0] + L[1]*G[1] + L[2]*G[2] = $-5\times0{,}5625+5\times0{,}375+25\times0{,}0625$

espérance de la v.a. X

Cette fonction retourne l'espérance de X : $E(X)=0{,}625$ €

(Gain moyen du joueur).

Exercice 2 Type E3C à faire pour jeudi 18/06

Dans tout l'exercice, on notera $P(E)$ la probabilité d'un évènement E.

La répartition des 150 adhérents d'un club de sport est donnée dans le tableau ci-dessous : $\text{Card}(\Omega) = 150$

Âge	15 ans	16 ans	17 ans	18 ans
Nombre de filles	17	39	22	10
Nombre de garçons	13	36	8	5
Total	30	75	30	15

On choisit un adhérent au hasard. équiprobabilité

1. Quelle est la probabilité que l'adhérent choisi ait 17 ans ?
2. L'adhérent choisi a 18 ans. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

On note X la variable aléatoire donnant l'âge de l'adhérent choisi.

3. Déterminer la loi de probabilité de X.

4. Calculer $P(X \geq 16)$ et interpréter le résultat.
5. Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat.

Correction :

1) On est en situation d'équiprobabilité donc la probabilité recherchée se calcule avec la formule :

$$\frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{30}{150} = \frac{1}{5} = 0,2$$

2) Notons les évènements :

A = " L'adhèrent a 18 ans "
B = " L'adhèrent est une fille "

On calcule la probabilité condition-nelle :

$$P_A(B) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

3)
X variable aléatoire donnant l'âge de l'adhèrent. La loi de probabilité de X est :

$X \geq 16$

k	15	16	17	18
$P(X=k)$	$\frac{30}{150}$	$\frac{75}{150}$	$\frac{30}{150}$	$\frac{15}{150}$
	0,2	0,5	0,2	0,1

4) $P(X \geq 16) = 1 - P(X=15) = 1 - 0,2$
$P(X \geq 16) = 0,8$

5) Calculer l'espérance de X :

$$E(X) = 0,2 \times 15 + 0,5 \times 16 + 0,2 \times 17 + 0,1 \times 18 = 16,2$$

L'espérance de X s'interprète comme

la valeur moyenne de X si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

L'écart-type est un indicateur de dispersion des valeurs autour de l'espérance.

* Sur une série statistique on a déjà rencontré des indicateurs de dispersion comme l'écart interquartile ou l'étendue.

Valeur k	15	16	17	18
Carré de l'écart avec E(X)	$(15-16{,}2)^2$	$(16-16{,}2)^2$	$(17-16{,}2)^2$	$(18-16{,}2)^2$
Probabilité $P(X=k)$	0,2	0,5	0,2	0,1

On calcule d'abord la variance :

$$V(X) = 0{,}2 \times (15-16{,}2)^2 + 0{,}5 \times (16-16{,}2)^2 + 0{,}2 \times (17-16{,}2)^2 + 0{,}1 \times (18-16{,}2)^2$$

$V(X) = 0{,}76$ en années au carré

· L'écart-type est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq 0,87$$

en années

Rque : L'écart-type est dans la même unité que la v.a. que X et il mesure la dispersion des valeurs autour de la moyenne