Correction d'un sujet d'E3C2

Exercice 1 : (QCM)

Question 1

La droite D de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ passant par $A(-1;2)$ a pour équation :

a) $-3x+y-5=0$	b) $x+3y-5=0$	c) $x-3y-5=0$	d) $3x+y+1=0$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ vecteur directeur de $\mathcal{D}$

donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ vecteur normal à $\mathcal{D}$

car $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$

Remarque :

$\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ vecteur directeur de $\mathcal{D}$

si et seulement si

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ vecteur normal à $\mathcal{D}$

Une équation de $\mathcal{D}$ est donc de la forme $x+3y+c=0$

De plus $A(-1;2) \in \mathcal{D}$ donc :

$-1+3\times2+c=0 \iff c=-5$

Donc une équation de $\mathcal{D}$ est :

b) $x+3y-5=0$

Question 2

On considère la droite d d'équation $5x - 8y + 9 = 0$. Alors :

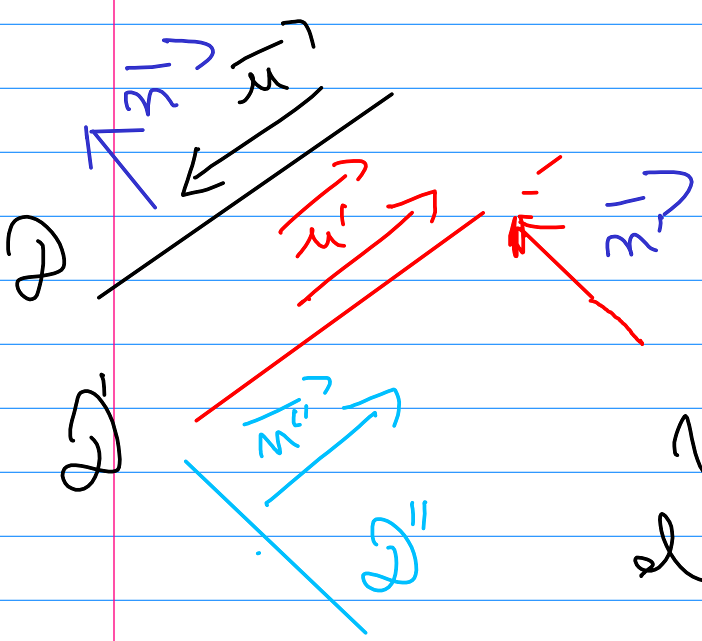
a) $A(6;7)$ appartient à D	b) $\vec{n}\binom{5}{8}$ est un vecteur normal à d
c) d coupe l'axe des ordonnées au point $B(0;1)$	d) d est parallèle à la droite d' d'équation $2{,}5x - 4y + 2 = 0$

a) $5 \times 6 - 8 \times 7 + 9 \neq 0$ donc ce n'est pas a)

b) Un vecteur normal à D est $\vec{n'}\binom{5}{8}$ qui n'est pas colinéaire à $\vec{n}\binom{5}{8}$

c) $5 \times 0 - 8 + 9 \neq 0$ donc $B(0;1) \notin D$

d) Soit D' d'équation $2{,}5x - 4y + 2 = 0$



Un vecteur normal de D' est $\vec{n'}\binom{2{,}5}{-4}$

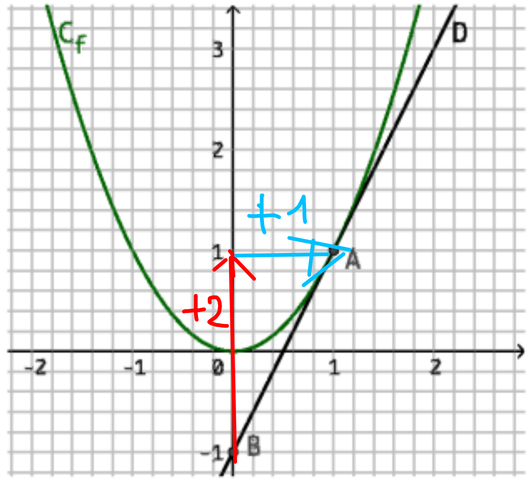
Un vecteur normal de D est $\vec{n}\binom{5}{-8}$

On remarque que $\vec{n'} = \frac{1}{2}\vec{n}$
donc les vecteurs normaux sont colinéaires donc les droites sont parallèles

Réponse d)

Question 3

On considère la fonction f dont la représentation graphique C_f est donnée ci-contre. La droite D est la tangente à C_f au point $A(1;1)$. Le point $B(0;-1)$ appartient à la droite D. Le nombre dérivé $f'(1)$ est égal à :



a) 1	b) $\frac{1}{2}$	c) 2	d) -2

Question 4

On considère une fonction f polynôme du second degré dont le tableau de signes est donné ci-après :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Une expression de $f(x)$ peut être :

a) $2x^2+5x-2$	b) $-x^2+1$	c) $-x^2+x+2$	d) x^2+x-2

Question 3. $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente (AB) :

$$f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2}{1} = 2 \qquad \text{Réponse c)}$$

Question 4 :

On remarque que -1 est racine de $-x^2+x+2$. De plus $\frac{c}{a} = \frac{2}{-1} = -2$ est égal au produit des racines.

donc l'autre racine est égale à :

produit des racines $\dfrac{-2}{-1} = 2$ → l'autre racine

racine "évidente"

De plus le signe de a est à l'exté-rieur des racines donc le signe de $-x^2+x+2$ est le tableau donné.

Réponse c)

Question 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.

Alors la fonction dérivée de f, notée f' est définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f'(x) = \mathrm{e}^x$	b) $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$	c) $f'(x) = \mathrm{e}$	d) $f'(x) = x^2\mathrm{e}^x$

Pour tout réel x :

$$f(x) = \underbrace{x}\,\underbrace{e^x}$$

f est de la forme $f = u \times v$

$u(x) = x$ $\quad$ $v(x) = e^x$

$u'(x) = 1$ $\quad$ $v'(x) = e^x$

D'après une propriété du cours :

$$(u \times v)' = u'v + uv'$$

Donc :

$$f'(x) = \underset{\sim}{e^x} + x \times \underset{\sim}{e^x} = e^x \times (x+1)$$

on factorise par e^x

Réponse d)

Rque : Pour tout réel x on a $e^{x} > 0$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x+1$

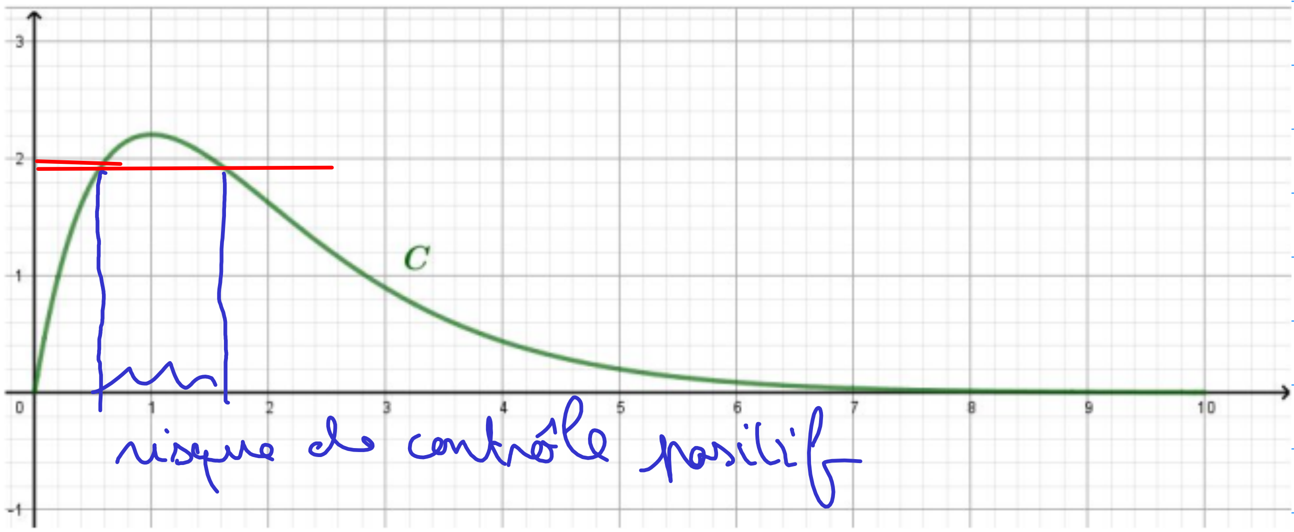
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(1) = 1 \times e^{1} = e^{1} \simeq 2,718\ldots$	$\nearrow$	

Exercice 4 (5 points)

On procède, chez un sportif, à l'injection intramusculaire d'un produit. Celui-ci se diffuse progressivement dans le sang. On admet que la concentration de ce produit dans le sang (exprimée en mg/L = milligramme par litre) peut être modélisée par la fonction f, définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$f(x) = \frac{6x}{e^x} \quad \text{où } x \text{ est le temps exprimé en heure.}$$

Sa courbe représentative ***C*** est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.



1. Montrer que pour tout $x \in [0; 10]$, la fonction dérivée de f, notée f', a pour expression :

$$f'(x) = \frac{6-6x}{e^x}.$$

2. Étudier le signe de f' sur $[0; 10]$ puis en déduire le tableau de variations de f sur $[0; 10]$.

3. Quelle est la concentration maximale du médicament dans le sang ? (on donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-1} près). Au bout de combien de temps est-elle atteinte ?

4. Ce produit fait l'objet d'une réglementation par la fédération sportive : un sportif est en infraction si, au moment du contrôle, la concentration dans son sang du produit est supérieure à 2 mg/L.

Le sportif peut-il être contrôlé à tout moment après son injection ? Expliquer votre raisonnement en vous basant sur l'étude de la fonction et/ou une lecture graphique sur la courbe ***C***.

1) f est un quotient de la forme :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec u et v dérivables sur $[0;10]$

$u(x) = 6x$ $\qquad$ $v(x) = e^x$

$u'(x) = 6$ $\qquad$ $v'(x) = e^x$

D'après une propriété du cours :

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Pour tout réel $x \in [0;10]$:

$$f'(x) = \frac{6e^x - 6xe^x}{(e^x)^2} = \frac{\cancel{e^x} \times (6-6x)}{\cancel{e^x} \times e^x}$$

donc $f'(x) = \dfrac{6-6x}{e^x}$

2) Pour tout réel x, on a $e^{x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est fixé par le signe du numérateur $6-6x$.

Valeur d'annulation de $6-6x$:

$$6-6x=0 \iff x=\frac{6}{6}=1$$

On en déduit le tableau de signes de f' :

x	0		1		10
signe de $f'(x)$		+	0	−	

On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		1		10
$f(x)$		↗	$f(1)$	↘	

2) La concentration maximale est égale à $f(1)=\frac{6}{e^{1}}=6\times e^{-1}$ atteinte au bout d'1 heure. $f(1)\simeq 22$ mg/L

Exercice 2 (5 points)

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que pourraient emporter certains voyageurs.

On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique. On note :

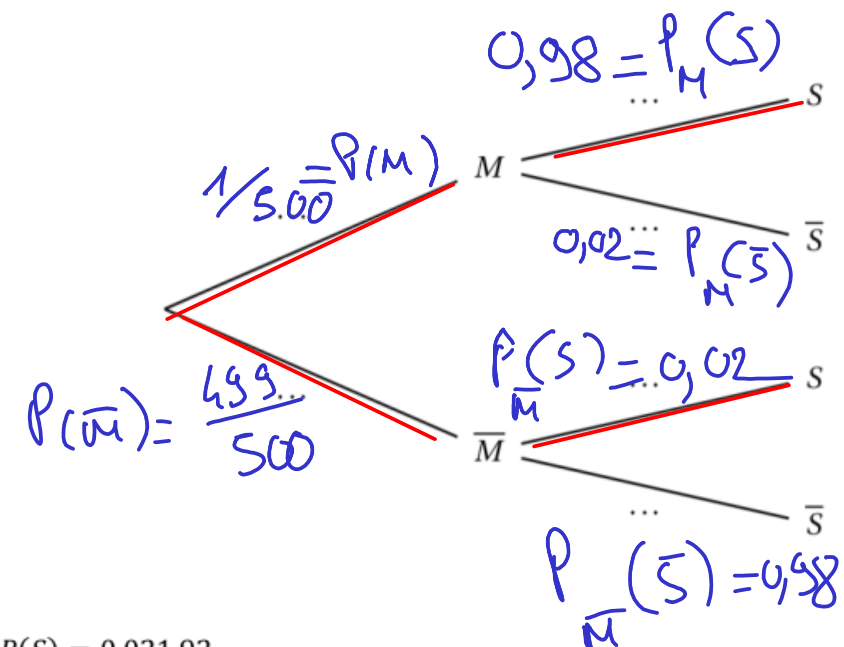
- S l'événement « le voyageur fait sonner le portique ».
- M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ».

On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

On remarque que :

- Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98.
- Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous illustrant cette situation :



2. Montrer que : $P(S) = 0,021\,92$.

2) M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

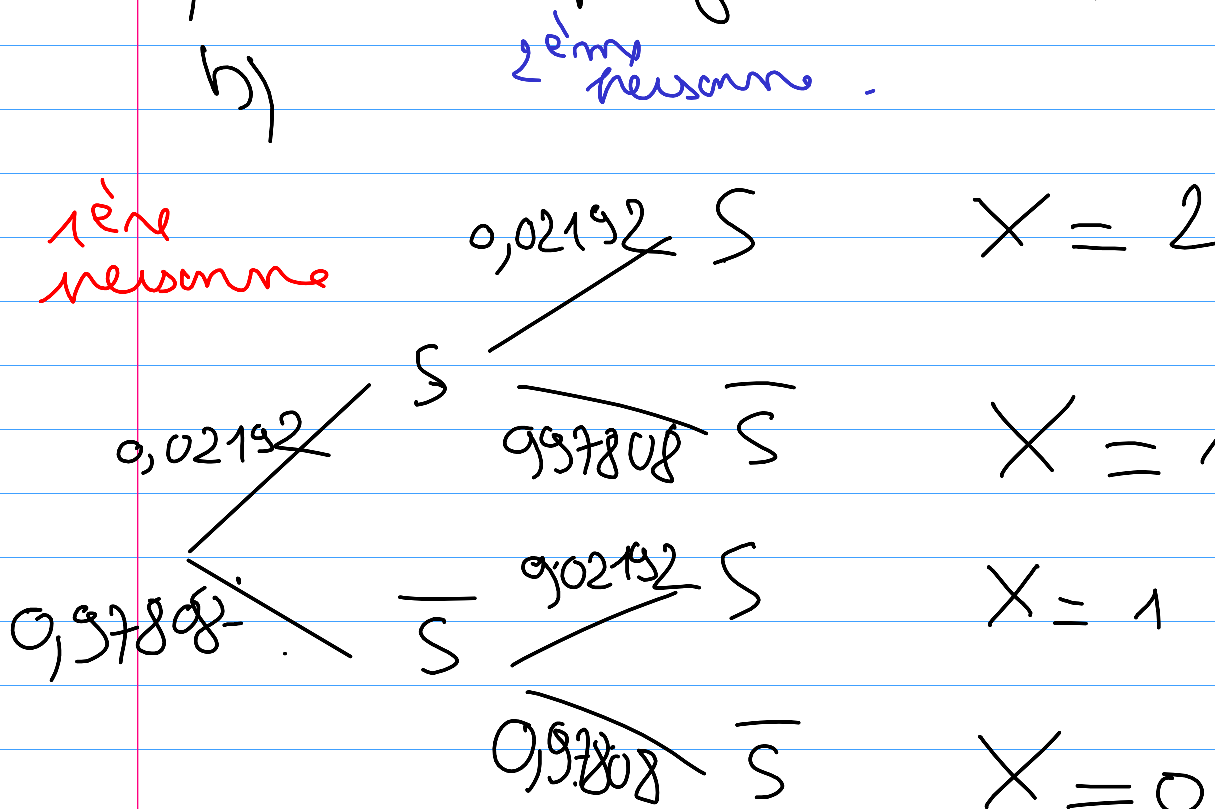
$$P(S) = P(S \cap M) + P(S \cap \overline{M})$$

On applique 2 fois la formule des probabilités composées :

$$P(S) = \frac{1}{500} \times 0,98 + \frac{499}{500} \times 0,02 = 0,02192$$

3) a) hors programme voir l'annexe

b)



k	0	1	2
$P(X=k)$	$0,97808^2$	$P(X=1)$	$0,02192^2$

X est une v.a. donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique lorsque deux personnes passent le portique.

$P(X=1) = 2 \times \underbrace{0{,}02192 \times 0{,}97808}$

nombre de chemins

probabilité d'un chemin

c) Calculons l'espérance de X :

$E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1)$

$+ 2 \times P(X=2)$

formule raccourcie

$E(X) = n \times p \Leftarrow$ propriété des lois binomiales (voir programme de terminale)

$E(X) = 2 \times 0{,}02192$

n : nombre d'épreuves
p : probabilité du succès S

L'espérance s'interprète comme la valeur moyenne de X sur un échantillon de grande taille de répétition de cette expérience aléatoire : c'est le nombre de moyens de personnes qui font dominer la politique.

3. On suppose qu'à chaque fois qu'un voyageur franchit le portique, la probabilité que ce portique sonne est égale à $0{,}02192$, et ce de façon indépendante des éventuels déclenchements de sonnerie lors des passages des autres voyageurs.

Deux personnes passent successivement le portique de sécurité. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où le portique sonne.

a. Justifier qu'on peut modéliser la loi de X par une loi binomiale $B(n; p)$ dont on précisera les paramètres n et p.

b. Reprendre et compléter le tableau donnant la loi de X :

k	0	1	2
$P(X = k)$			

c. Calculer et interpréter l'espérance de X dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 (5 points)

En 2019, les déchets d'une entreprise sont évalués à 6 000 tonnes.

Cette entreprise s'engage à réduire ses déchets de 5 % chaque année.

1. Avec cette politique, quelle quantité de déchets peut envisager l'entreprise pour l'année 2020 ?

2. Pour tout entier naturel n, on note d_n la quantité de déchets produits en tonne par cette entreprise l'année $2019 + n$. Avec cette notation, on a alors $d_0 = 6000$.

a. Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n pour tout entier naturel n.

b. Quelle est la nature de la suite (d_n) ?

c. Déterminer la quantité totale de déchets produits par l'entreprise entre 2019 et 2023. On arrondira le résultat à la tonne près.

3. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien d'années d'application de cette politique de réduction des déchets la quantité annuelle produite aura diminué de 40 % par rapport à la quantité produite en 2019.

Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous sur la copie afin qu'il permette de répondre à la question posée :

```
D ← 6000
N ← 0
Tant que D...............
    D ←...............
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

1) Pour l'année 2020, l'entreprise peut envisager une quantité de déchets de :

$6000 \times \left(1 - \frac{5}{100}\right) = 5700$ tonnes

2) a) Pour tout entier naturel n, on a :

$$d_{n+1} = \left(1 - \frac{5}{100}\right) d_n = 0{,}95 d_n$$

b) La suite (d_n) est géométrique de raison 0,95.

c) La quantité totale de déchets produits entre 2019 et 2023 est égale à :

$$d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4$$

$$= d_0 \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb termes}}}{1 - \text{raison}} = 6000 \times \frac{1 - 0{,}95^5}{1 - 0{,}95}$$

$$\simeq 27146 \text{ tonnes}$$

3. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien d'années d'application de cette politique de réduction des déchets la quantité annuelle produite aura diminué de 40 % par rapport à la quantité produite en 2019.

Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous sur la copie afin qu'il permette de répondre à la question posée :

```
D ← 6000
N ← 0
Tant que D > 3600
    D ← 0,95 × D
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

60% de d_0 égal à :

$$\frac{60}{100} \times 6000 = 3600$$

c'est le seuil en dessous duquel on souhaite passer.