Variables aléatoires
Exercices type E3C

Exercice 1

Dans un jeu, Jeanne doit trouver la bonne réponse à une question posée.
Les questions sont classées en trois catégories : sport, cinéma et musique.
Jeanne, fervente supportrice de ce jeu, est consciente qu'elle a :
1 chance sur 2 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en sport ;
3 chances sur 4 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en cinéma ;
1 chance sur 4 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en musique.
On note :
S l'événement : « Jeanne est interrogée en sport » ;
C l'événement : « Jeanne est interrogée en cinéma » ;
M l'événement : « Jeanne est interrogée en musique » ;
B l'événement : « Jeanne donne une bonne réponse ».

Rappel de notation : la probabilité d'un événement A est notée $P(A)$.

Dans chaque catégorie, il y a le même nombre de questions. On admet donc que $P(S) = P(C) = P(M) = \frac{1}{3}$.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Jeanne tire au hasard une question. Montrer que $P(B) = \frac{1}{2}$.

Pour participer à ce jeu, Jeanne doit payer 10 € de droit d'inscription. Elle recevra :

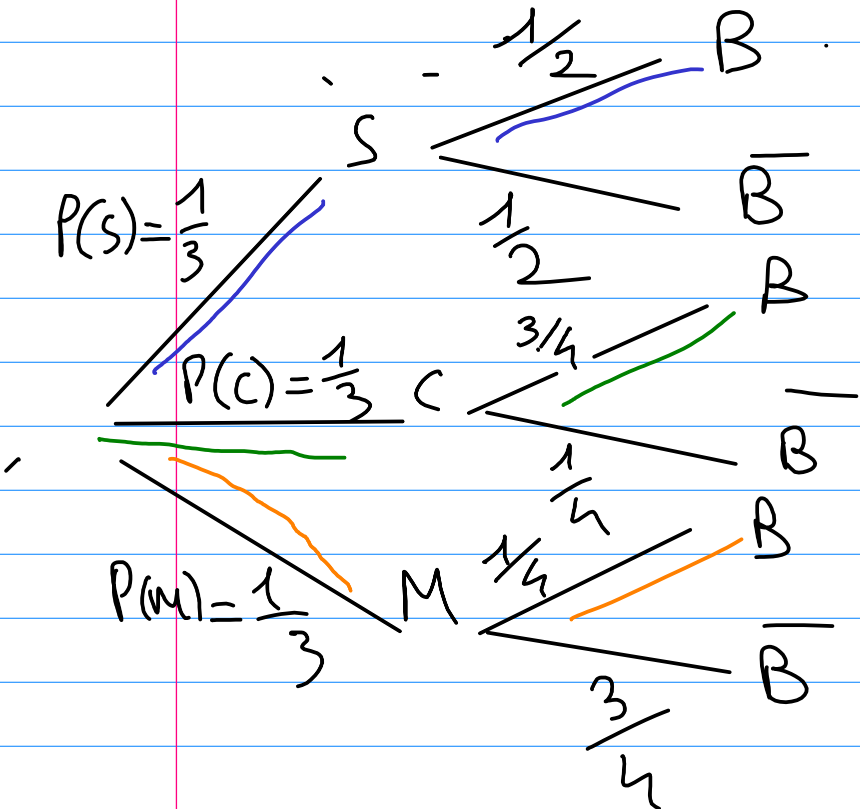
- 10 € si elle est interrogée en sport et que sa réponse est bonne ;
- 20 € si elle est interrogée en cinéma et que sa réponse est bonne ;
- 50 € si elle est interrogée en musique et que sa réponse est bonne ;
- rien si la réponse qu'elle donne est fausse.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie jouée par Jeanne associe son gain algébrique, c'est-à-dire la différence en euros entre ce qu'elle reçoit et les 10 € de droit d'inscription.

3. Montrer que $P(X = 40) = \frac{1}{12}$.
4. Déterminer la loi de probabilité de X.
5. Calculer l'espérance mathématique de X. Jeanne a-t-elle intérêt à jouer ?

Corrigé :

1) Arbre pondéré modélisant la situation



$\frac{1}{2} = P_S(B)$

$P_C(B) = \frac{3}{4}$

$P_M(B) = \frac{1}{4}$

2) Soit l'événement :

$S \cap B$ = " La question porte sur le sport et Jeanne donne la bonne réponse "

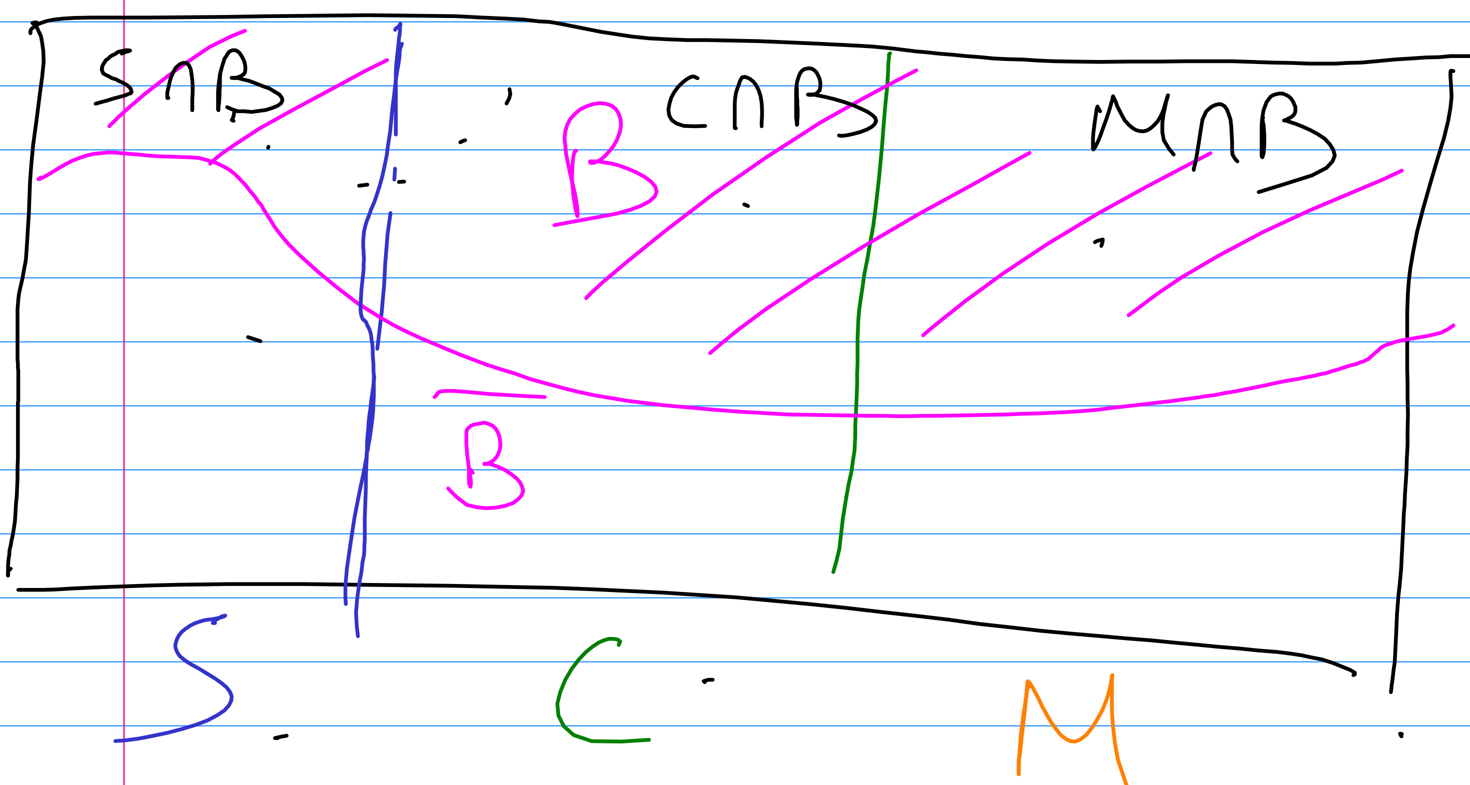
$$P(S \cap B) = P(S) \times P_S(B)$$

$$P(S \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

De même :

- $P(C \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

- et $P(M \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$



S, C et M forment une partition de l'univers donc :

$$B = \underbrace{(S \cap B) \cup (C \cap B) \cup (M \cap B)}_{\text{réunion d'événements incompatibles}}$$

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(S \cap B) + P(C \cap B) + P(M \cap B)$$

donc $P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$

$$\boxed{P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}}$$

3) $\{X=40\}$ est l'événement $M \cap B$, dans ce cas le gain algébrique est effectivement :

Gain algébrique = Recette − Mise

$= 50 - 10 = 40$

On a donc :

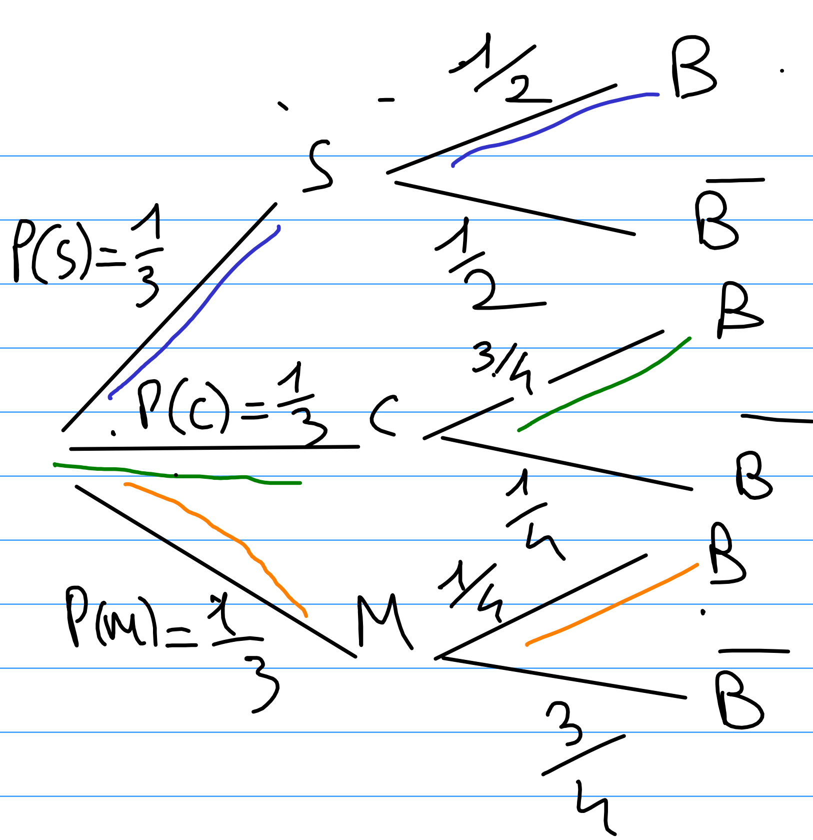
$$P(X=40) = P(M \cap B)$$

$$= P(M) \times P_M(B)$$

$$P(X=40) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

4) Loi de probabilité :

k	40	$20-10$	$10-10$	$0-10$
$P(X=k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$



$X = 10 - 10 = 0$

$X = 0 - 10$

$X = 20 - 10 = 10$

$X = 0 - 10$

$X = 40$

$X = 0 - 10$

$$P(X=10) = 1 - P(X=40) - P(X=10) - P(X=0)$$

$$P(X=10) = 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

On peut remarquer que

$\{X=10\} = \overline{B}$

donc

$$P(X=10) = 1 - P(B)$$

$$P(X=10) = \frac{1}{2}$$

5) Calculons l'espérance de X :

$$E(X) = \frac{1}{12} \times 40 + \frac{1}{4} \times 10 + 0 \times \frac{1}{6} + (-10) \times \frac{1}{2}$$

$$E(X) = \frac{10}{3} + \frac{5}{2} - \frac{10}{2}$$

$$E(X) = \frac{10}{3} - \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$$

Cette espérance repré-sente le gain moyen d'un

joueurs sur un grand nombre
de parties.