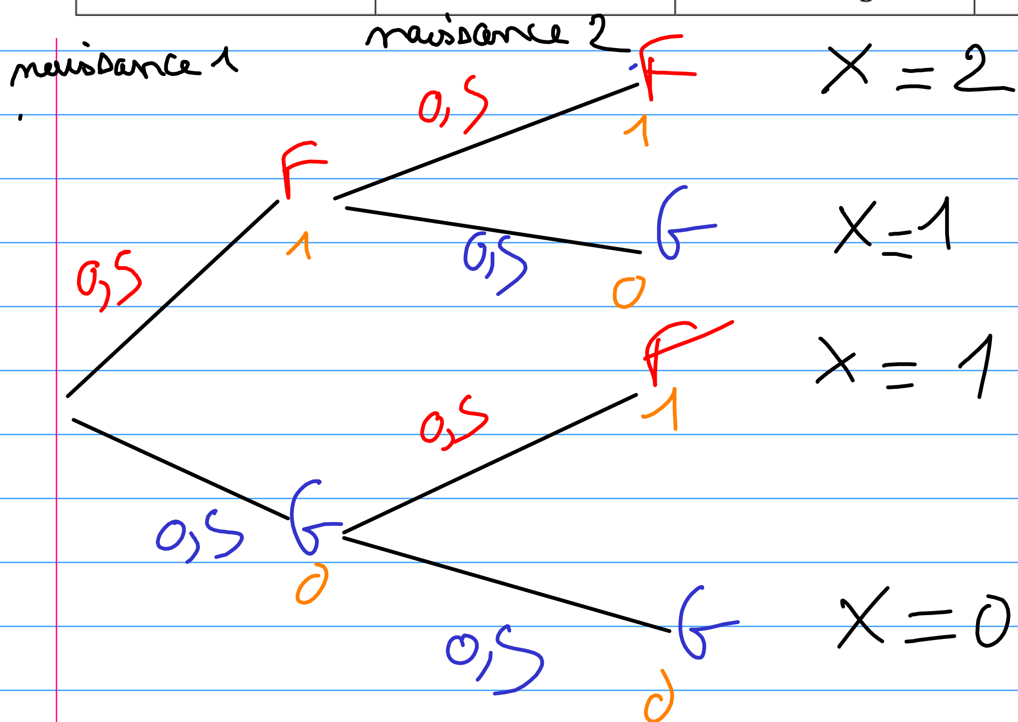
Variables aléatoires dans les E3C

Question 2

On choisit au hasard un couple ayant deux enfants et on note X la variable aléatoire égale au nombre de filles du couple. On admet que la probabilité qu'un enfant soit une fille est égale à 0,5 et qu'il y a indépendance du sexe de l'enfant entre deux naissances.

Déterminer $P(X \geq 1)$.

a) 0,25	b) 0,5	c) $\frac{1}{3}$	d) 0,75



Valeurs prises par la variable aléatoire X

Loi de probabilité de la variable aléatoire X :

$X \geq 1$

k	0	1	2
$P(X=k)$	$0{,}5^2$	$2 \times 0{,}5^2$	$0{,}5^2$

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2)$$

L'événement contraire de $\{X \geq 1\}$ est $\{X = 0\}$ dont la probabilité est :

$$P(X=0) = 0,5^2 = 0,25$$

donc $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 0,75$

5. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X donnant le gain en euros, d'un joueur, à un jeu, est donnée par le tableau suivant :

x_i	-10	6	10
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

Sur un grand nombre de parties, le gain moyen que peut espérer le joueur est :

a) 3,5 euros	b) 4 euros	c) 2 euros	d) 6 euros

L'espérance de la variable aléatoire X est égale à :

$$E(X) = -10 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{3}{8} + 10 \times \frac{3}{8}$$

$$E(X) = -\frac{20}{8} + \frac{18}{8} + \frac{30}{8} = \frac{28}{8} = \frac{7}{2} = 3,5$$

On peut estimer le gain moyen (valeur moyenne de X) sur un échantillon de grande taille sera proche de $\frac{7}{2} = 3,5$ euros.

Question 2

Mise

Lors d'un jeu, on mise 1 euro et on tire une carte au hasard parmi 30 cartes numérotées de 1 à 30. On gagne 3 euros si le nombre porté sur la carte est premier, sinon, on ne gagne rien. On détermine le gain algébrique en déduisant le montant de la mise de celui du gain. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique. Que vaut l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X ?

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{10}$ c) 0 d) $\frac{2}{3}$

Exemples : Gain algébrique = Gain − Mise

Carte	Premier	Gain algébrique
1	non	$0-1=-1$
2	oui	$3-1=2$
3	oui	$3-1=2$
4	non	$0-1=-1$
⋮		

Notons X la variable aléatoire représentant le gain algébrique.

X peut prendre deux valeurs -1 ou 2

Loi de probabilité :

k	-1	2
$P(X=k)$	$\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$	$\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$

Liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 30 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

L'espérance de X est égale à :

$$E(X) = -1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 0$$

Exercice 4 (5 points)

Une étude statistique menée lors des entraînements montre que, pour un tir au but, Karim marque avec une probabilité de 0,7.

Karim effectue une série de 3 tirs au but. Les deux issues possibles après chaque tir sont les événements :

- M : « Karim marque un but » ;
- R : « Karim rate le tir au but ».

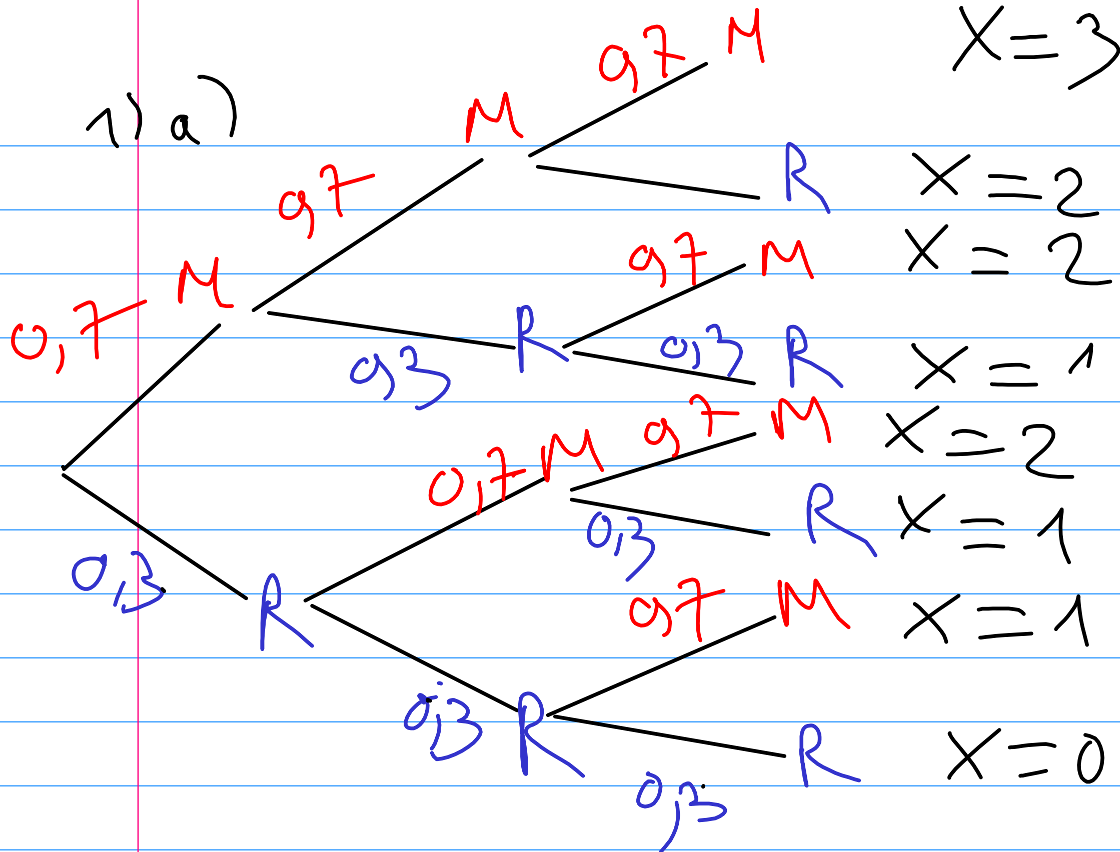
épreuve de Bernoulli

On admet que les tirs au but de Karim sont indépendants.

1. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre total de buts marqués à l'issue de cette série de tirs par Karim.
   - **a.** Réaliser un arbre pondéré permettant de décrire toutes les issues possibles.
   - **b.** Déterminer la loi de probabilité de X.
   - **c.** Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X.

2. On propose à un spectateur le jeu suivant : il mise 15 € avant la série de tirs au but de Karim ; chaque but marqué par Karim lui rapporte 6 €, et chaque but manqué par Karim ne lui rapporte rien.
   On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique du spectateur, c'est-à-dire la différence entre le gain total obtenu et la mise engagée.
   - **a.** Exprimer Y en fonction de X.
   - **b.** Calculer l'espérance $E(Y)$ de la variable aléatoire Y. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

1) a)



b)

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$0{,}3^3$			$P(X=3)=0{,}7^3$

$$P(X=1) = \underbrace{\underbrace{0{,}7}_{\text{1 succès}} \times \underbrace{0{,}3 \times 0{,}3}_{\text{2 échecs}}}_{\text{probabilité d'un chemin réalisant } X=1} \times \underbrace{3}_{\text{nombre de chemins réalisant } X=1}$$

De même :

$$P(X=2) = \underbrace{0{,}3 \times 0{,}7 \times 0{,}7}_{\text{probabilité d'un chemin pour } X=2} \times \underbrace{3}_{\text{nombre de chemins réalisant } X=2}$$

c) Espérance de X :

$$E(X) = 0 \times 0{,}3^3 + 1 \times 3 \times 0{,}3^2 \times 0{,}7 + 2 \times 3 \times 0{,}3 \times 0{,}7^2 + 3 \times 0{,}7^3$$

$$E(X) = 0{,}7 \times \left(3 \times 0{,}3^2 + 6 \times 0{,}3 \times 0{,}7 + 0{,}7^2\right)$$

$$E(X) = 0{,}7 \times (0{,}27 + 1{,}26 + 3 \times 0{,}49)$$

$$E(X) = 0{,}7 \times (1{,}53 + 1{,}47)$$

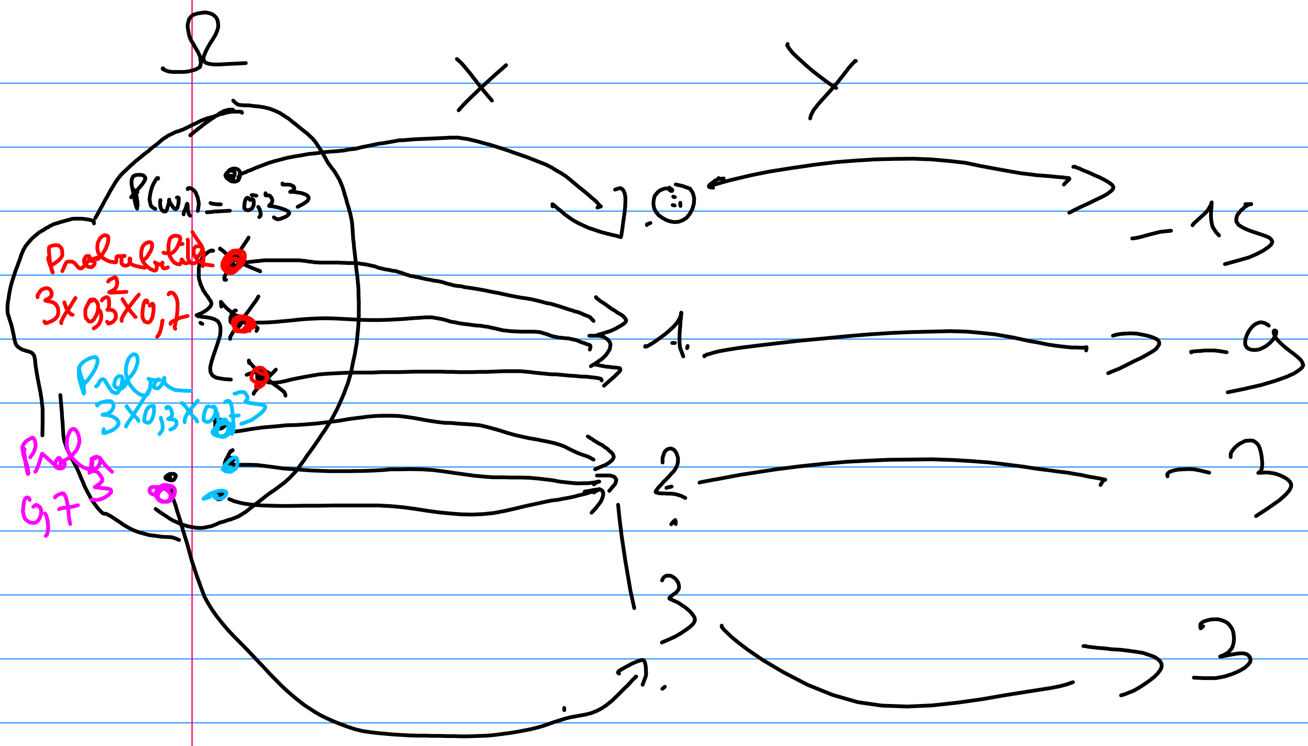
$$E(X) = \underline{0{,}7 \times 3} = 2{,}1$$

on remarque que $E(X) = n \times p$.

2) Gain algébrique = Gain − Mise

La variable aléatoire Y représentant le gain algébrique dépend de X selon la relation fonctionnelle :

$$Y = 6X - 15$$



Espérance de X

$$E(X) = 0 \times \underline{P(X=0)} + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) + 3 \times P(X=3)$$

Espérance de Y :

$$E(Y) = (6\times 0 - 15) \times \underbrace{P(Y=-15)}_{=P(X=0)} + (6\times 1 - 15) \times \overbrace{P(Y=-9)}^{P(X=1)} + (6\times 2 - 15) \times \underbrace{P(Y=-3)}_{P(X=2)} + (6\times 3 - 15) \times \underbrace{P(Y=3)}_{P(X=3)}$$

$$E(Y) = (6\times 0 - 15)\times P(X=0)$$
$$+ (6\times 1 - 15)\times P(X=1)$$
$$+ (6\times 2 - 15)\times P(X=2)$$
$$+ (6\times 3 - 15)\times P(X=3)$$

$$E(Y) = 6\times \big(0\times P(X=0) + 1\times P(X=1)$$
$$+ 2\times P(X=2) + 3\times P(X=3)\big)$$
$$- 15\times \big(\underbrace{P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)}_{=1}\big)$$

$$E(Y) = 6\,E(X) - 15$$

D'après une propriété du cours

si $Y = 6X - 15$ alors $E(Y) = 6\,E(X) - 15$

Or $E(X) = 2{,}1$

donc on a $E(Y) = 6\times 2{,}1 - 15$

$E(Y) = 12{,}6 - 15$

$E(Y) = -2{,}4$

En moyenne, sur un un grand nombre

de parties, on peut estimer
que Karim perd 2,4 € par partie.