Exemples du cours sur l'exponentielle 2019/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

22 mars 2020

Table des matières

Capacité 2 : Questions 1 et 2

1. **Question 1** : *Démontrer que pour tout réel* x *et tout entier naturel* n*, on a* $\exp(x)^{-n} = \exp(-nx)$.
   Pour tout réel x et tout entier naturel n, on a
   $\exp(x)^{-n} = \frac{1}{(\exp(x))^n} = \frac{1}{\exp(nx)} = \exp(-nx)$
2. **Question 2** : *Soit* a *un réel, calculer les expressions*
   $A = \exp(a) \times \exp(2-a),\ B = (\exp(a) + \exp(-a))^2$
   - $A = \exp(a) \times \exp(2-a) = \exp(a+2-a) = \exp(2)$
   - $B = (\exp(a) + \exp(-a))^2 = \exp(2a) + 2\exp(a)\exp(-a) + \exp(-2a) = \exp(a) + 2\exp(0) + \exp(-a) = \exp(a) + \exp(-a) + 2$

Question 3 : *Démontrer chacune des égalités suivantes :*

1. *Pour tout réel* x, $\frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1} = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}$.

Pour tout réel x,

$$\frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1} = \frac{\exp(-x)\left(\exp(2x)-1\right)}{\exp(-x)\left(\exp(2x)+1\right)}$$

On utilise la relation $\exp(x)\exp(-x)=1$ en multipliant par $\exp(-x)$ numérateur et dénominateur, cela permet de changer les 1 en $\exp(-x)$ et les $\exp(2x)$ en $\exp(x)$

$$\frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1} = \frac{\exp(-x+2x)-\exp(-x)}{\exp(-x+2x)+\exp(-x)}$$
$$\frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1} = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}$$

L'égalité est démontrée.

Question 3 : *Démontrer chacune des égalités suivantes :*

2 *Pour tout réel* x, $4-\frac{4}{1+\exp(x)}=\frac{4}{1+\exp(-x)}$.

On utilise la même technique que dans la question précédente.
Pour tout réel x,

$$4-\frac{4}{1+\exp(x)}=4-\frac{4\exp(-x)}{(1+\exp(x))\exp(-x)}$$
$$4-\frac{4}{1+\exp(x)}=4-\frac{4\exp(-x)}{\exp(-x)+1}$$

on met sur le même dénominateur

$$4-\frac{4}{1+\exp(x)}=\frac{4(\exp(-x)+1)-4\exp(-x)}{\exp(-x)+1}=\frac{4}{\exp(-x)+1}$$

L'égalité est démontrée.

Question 3 : *Démontrer chacune des égalités suivantes :*

3 *Pour tout réel x,*
$(\exp(x)+\exp(-x))^2-(\exp(x)-\exp(-x))^2=4.$

Il suffit de développer. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}(\exp(x)+\exp(-x))^2-(\exp(x)-\exp(-x))^2 = \\ \exp(2x)+2\exp(x)\exp(-x)+\exp(-2x) \\ -(\exp(2x)-2\exp(x)\exp(-x)+\exp(-2x))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\exp(x)+\exp(-x))^2-(\exp(x)-\exp(-x))^2 = \\ \exp(2x)+2\exp(0)+\exp(-2x)-(\exp(2x)-2\exp(0)+\exp(-2x))\end{aligned}$$

Les termes en $\exp(2x)$ et $\exp(-2x)$ se simplifient :

$$(\exp(x)+\exp(-x))^2-(\exp(x)-\exp(-x))^2=4$$

L'égalité est démontrée.

la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \ldots + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times n}$$

Euler a démontré qu'elle converge vers e.
Complétons la fonction algorithmique `u(n)` ci-dessous et son implémentation en `Python` pour qu'elle retourne u_n.

```
Fonction u(n):
   s ⟵ 1
   d ⟵ 1
   Pour k allant de 1 à n
      d ⟵ d × k
      s ⟵ s + 1 / d
   Retourne s
```

Voici l'implémentation en `Python` pour qu'elle retourne u_n.

```
def u(n):
    s = 1
    d = 1
    for k in range(1, n + 1):
        d = d * k
        s = s + 1 / d
    return s
```

2,718281 est une valeur approchée avec 6 décimales exactes du nombre d'Euler e. Modifions la fonction Python pour qu'elle retourne le plus petit entier n tel que $\left|u_n - 2{,}718281\right| < 10^{-6}$. Il s'agit d'un algorithme de seuil.

```
def seuilU():
    s = 1
    d = 1
    n = 0
    while abs(s - 2.718281) >= 10 ** (-6):
        n = n + 1
        d = d * n
        s = s + 1 / d
    return n
```

Capacité 3

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1. $6 < 7$ donc par croissance de la fonction exponentielle, on a $e^7 > e^6 \iff e^7 > \left(e^2\right)^3$
2. $-4 > -6$, donc par croissance de la fonction exponentielle, on a $e^{-4} > e^{-6} \iff e^{-4} > \left(e^{-3}\right)^2$
3. $\forall x < 0$, on a $-x > 0 > x$, donc par croissance de la fonction exponentielle $e^{-x} > 1 > e^x$

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-1\,;2]$ par
$f(x) = (-x+2)\mathrm{e}^x$.

1. f est dérivable sur $[-1\,;2]$ comme produit de deux fonctions dérivables définies par $u(x) = -x+2$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.
   On a $u'(x) = -1$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$ et d'après une formule du cours, on a $f' = u'v + uv'$.
   On en déduit que
   $f'(x) = -\mathrm{e}^x + (-x+2)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(-1-x+2) = \mathrm{e}^x(1-x)$
2. D'abord, on résout une équation :

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^x(1-x) = 0 \Longleftrightarrow 1-x = 0 \Longleftrightarrow 1 = x$$

   Ensuite, on résout une inéquation :

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^x(1-x) > 0 \Longleftrightarrow 1-x > 0 \Longleftrightarrow 1 > x$$

   On a utilisé par deux fois la propriété : $\forall x, \mathrm{e}^x > 0$.

Capacité 4 Partie 2

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-1\,;2]$ par $f(x) = (-x+2)e^x$.

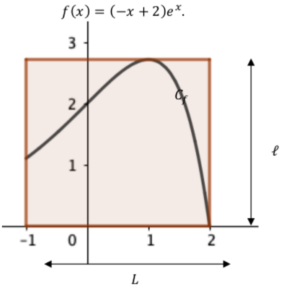
2 D'abord, on résout une équation :

$$f'(x) = 0 \iff e^x(1-x) = 0 \iff 1-x = 0 \iff 1 = x$$

Ensuite, on résout une inéquation :

$$f'(x) > 0 \iff e^x(1-x) > 0 \iff 1-x > 0 \iff 1 > x$$

On a utilisé par deux fois la propriété : $\forall x, e^x > 0$.
On en déduit que $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[-1\,;2]$, $f'(x) = 0$ en $x = 1$ et $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[-1\,;2]$.
Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $[-1\,;1]$, atteint un maximum en 1 et strictement décroissante sur $[1\,;2]$.



3 D'après la graphique, la largeur de la plaque est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-1\,;2]$, soit $f(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$. Ainsi l'aire de la plaque est égale à $L \times l = (2-(-1)) \times \mathrm{e} = 3\mathrm{e}$.

Résolution d'équations avec l'exponentielle : on utilise la propriété $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.

1. $e^{3x-1} = 1 \Leftrightarrow e^{3x-1} = e^0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$
2. $e^{x^2+x} = e \Leftrightarrow x^2 + x = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$ On résout cette équation du second degré (discriminant$\Delta = 5$) et on trouve que : $e^{x^2+x} = e \Leftrightarrow \boxed{x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$
3. Notons (E) l'équation $\frac{(e^x)^2 \times e^{x^2}}{(e^x)^4} = e^3$
   $(E) \Leftrightarrow e^{2x+x^2-4x} = e^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ On résout cette équation du second degré (discriminant $\Delta = 16$) et on trouve que : $(E) \Leftrightarrow \boxed{x = -1 \text{ ou } x = 3}$

Capacité 5 Inéquations

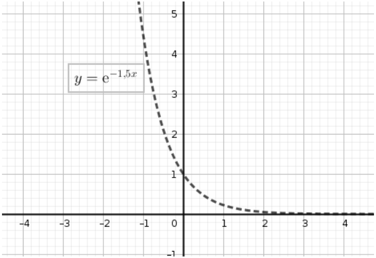
Résolution d'inéquations avec l'exponentielle : on utilise la propriété $e^a \leqslant e^b \Leftrightarrow a \leqslant b$.

1. $e^{-x} \geqslant 1 \Leftrightarrow e^{-x} \geqslant e^0 \Leftrightarrow -x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$. L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty\,; 0]}$.
2. $e^{-2x} > e^{x+3} \Leftrightarrow -2x > x + 3 \Leftrightarrow -1 > x$ L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty\,; -1[}$.
3. $(I) \Leftrightarrow e^{x^2} - (e^x)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \leqslant e^{2x}$
   $(I) \Leftrightarrow e^{x^2} \leqslant e^{2x} \Leftrightarrow x^2 \leqslant 2x \Leftrightarrow x(x-2) \leqslant 0$ D'après la règle du signe d'un trinôme, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = [0\,; 2]}$.
4. $(I) \Leftrightarrow e^{2x} - e^x > 0 > 0 \Leftrightarrow e^x(e^x - 1) > 0$ Pour tout réel x, on a $e^x > 0$, donc $(I) \Leftrightarrow e^x - 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$. L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} =]0\,; +\infty[}$.

Capacité 6 Question 1 a)

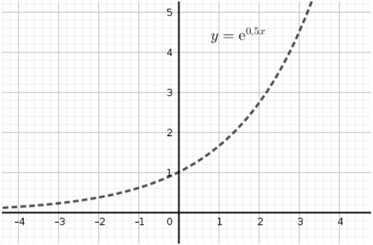
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \mathrm{e}^{-1,5t}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, on a $f'(t) = -1,5\mathrm{e}^{-1,5t}$.
- Pour tout réel t, on a $\mathrm{e}^{-1,5t} > 0$ et $-1,5 < 0$ donc $f'(t) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

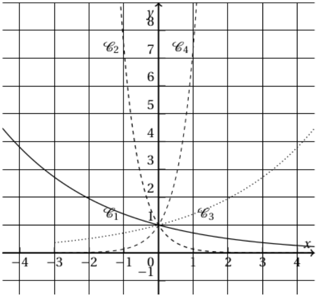


Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \mathrm{e}^{0,5t}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

- g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, on a $g'(t) = 0,5\mathrm{e}^{0,5t}$.
- Pour tout réel t, on a $\mathrm{e}^{0,5t} > 0$ et $0,5 > 0$ donc $g'(t) > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



- $f : x \mapsto e^{2x}$ a pour courbe $\mathscr{C}_3$
- $g : x \mapsto e^{-\frac{x}{3}}$ a pour courbe $\mathscr{C}_2$
- $h : x \mapsto e^{\frac{x}{3}}$ a pour courbe $\mathscr{C}_4$
- $k : x \mapsto e^{-2x}$ a pour courbe $\mathscr{C}_1$



Capacité 7 Question 1)

Un capital de 1000 euros est placé le 1er Janvier 2019 au taux fixe de $1,4\%$.
On note c_n le capital au premier Janvier $2019+n$.

- Pour tout entier naturel n, on a $c_{n+1} = \left(1 + \frac{1,4}{100}\right) c_n = 1,014 c_n$.
  On en déduit que la suite (c_n) est géométrique de raison $1,014$.
- Pour tout entier naturel n on a :
  $c_{n+1} - c_n == 1,014 c_n - c_n = 0,014 c_n$.
  On en déduit que l'augmentation du capital est proportionnelle au capital.
- Il s'agit d'une croissance exponentielle.

On veut modéliser l'évolution du capital par une fonction f dérivable sur $[0\,;+\infty[$ telle que le taux d'évolution instantané du capital $f'(t)$ est proportionnel au capital $f(t)$ selon une relation analogue à celle vérifiée par la suite (c_n). On recherche donc une fonction f vérifiant l'équation $f' = 0,014f$.

- Soit la f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = k\mathrm{e}^{0,014t}$.
  Pour tout réel $t \geqslant 0$, $f'(t) = 0,014k\mathrm{e}^{0,014t} = 0,014f(t)$.
- $f(0) = 1000 \Leftrightarrow k\mathrm{e}^{0,014\times 0} = 1000 \Leftrightarrow k = 1000$
- Le capital au 1er Janvier 2030 en utilisant la suite (c_n) est $c_{11} = 1,014^{11} \times 1000 \approx 1165,24$ €.
- Le capital au 1er Janvier 2030 en utilisant la fonction f est $f(11) = 1000\mathrm{e}^{0,014\times 11} \approx 1166,49$ €.