Exercices sur l'exponentielle 2019/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

25 mars 2020

Plan

Table des matières

Barbazo, exercice 6 p. 192, Partie 1

On donne les ordres de grandeur : $\exp(4) = 50$ et $\exp(6) = 400$.
En déduire les ordres de grandeur de $\exp(2)$ et $\exp(10)$

- $\exp(2) = \exp(6-4) = \frac{\exp(6)}{\exp(4)} \approx \frac{400}{50} = 8$.
- On peut aussi écrire $\exp(4) = \exp(2 \times 2) = (\exp(2))^2$.
  On en déduit que $(\exp(2))^2 = 50 \Leftrightarrow \exp(2) = \sqrt{50} \approx 7$ car $\exp(2) > 0$.
  On manipule des ordres de grandeur, selon la façon de mener le calcul, on peut obtenir des résultats différents.
  A l'unité près, avec la calculatrice, on trouve $\exp(2) \approx 7$.
- $\exp(10) = \exp(6+4) = \exp(6) \times \exp(4) \approx 400 \times 50 = 20000$.

Barbazo, exercice 6 p. 192, Partie 2

On donne les ordres de grandeur : $\exp(4) = 50$ et $\exp(6) = 400$.
En déduire les ordres de grandeur de $\exp(-2)$, $\exp(8)$ et $\exp(12)$.

- De $\exp(2) \approx 8$ on déduit que $\exp(-2) = \frac{1}{\exp(2)} \approx \frac{1}{8}$.
- $\exp(8) = \exp(4 \times 2) = (\exp(4))^2 \approx 2500$
- On peut aussi écrire
  $\exp(8) = \exp(2 \times 4) = (\exp(2))^4 \approx 8^4 = 4096$
  On manipule des ordres de grandeur, selon la façon de mener le calcul, on peut obtenir des résultats différents.
  A l'unité près, avec la calculatrice, on trouve $\exp(8) \approx 2981$.
- $\exp(12) = \exp(2 \times 6) = (\exp(6))^2 \approx 160000$.
- On peut aussi écrire
  $\exp(12) = \exp(8+4) = \exp(8) \times \exp(4) \approx 2500 \times 50 = 125000$
  A l'unité près, avec la calculatrice, on trouve
  $\exp(12) \approx 162755$.

Barbazo, exercice 8 p. 192

Soit x un réel, simplifier les expressions en appliquant les propriétés algébriques de l'exponentielle.

- $A = \mathrm{e}^{3x}\mathrm{e}^{-4x} = \mathrm{e}^{3x-4x} = \mathrm{e}^{-x}$.
- $B = \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}} = \mathrm{e}^{-2x}$
- $C = \frac{1}{(\mathrm{e}^{-x})^6} = \mathrm{e}^{-(-6x)} = \mathrm{e}^{6x}$
- $C = D$ Coquille dans l'énoncé ?
- $E = \frac{\mathrm{e}^{3-2x}(\mathrm{e}^{x})^5}{\mathrm{e}^{x-2}} = \frac{\mathrm{e}^{3-2x}\mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}^{x-2}} = \frac{\mathrm{e}^{3-2x+5x}}{\mathrm{e}^{x-2}} = \mathrm{e}^{3x+3-(x-2)} = \mathrm{e}^{2x+5}$.

Barbazo, exercice 10 p. 192

Pour démontrer l'égalité, on peut par exemple partir d'un membre pour obtenir l'autre membre par transformation algébrique. Pour tout réel x, on a :

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^{x}}{e^{x}(1+e^{-x})}$$

L'égalité $e^{x}e^{-x} = e^{0} = 1$ est utilisée très fréquemment $\Rightarrow$ à Retenir

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^{x}}{e^{x}+e^{x-x}}$$
$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^{x}}{e^{x}+e^{0}}$$
$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^{x}}{e^{x}+1}$$

L'égalité est démontrée.

Barbazo, exercice 11 p. 192

Pour démontrer l'égalité, on peut par exemple partir d'un membre pour obtenir l'autre membre par transformation algébrique. Pour tout réel x, on a :

$$\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{x}} - \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}$$

On met sur le même dénominateur

$$\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{x}} - \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}$$
$$\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}} - \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}$$
$$\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} = \frac{\mathrm{e}^{x} - 1}{\mathrm{e}^{2x}}$$

L'égalité est démontrée.

Barbazo, exercice 12 p. 192 Question 1

Pour chaque suite définie par son terme général, on démontre qu'elle est géométrique et on précise son premier terme et sa raison :

- Pour tout entier naturel n on a $u_n = \exp(n)$ donc $u_{n+1} = \exp(n+1) = \exp(n)\exp(1) = \exp(1)u_n$.
  La suite (u_n) est donc géométrique de raison $\exp(1)$ et de premier terme $u_0 = 1$.

Barbazo, exercice 12 p. 192 Question 2

Pour chaque suite définie par son terme général, on démontre qu'elle est géométrique et on précise son premier terme et sa raison :

- Pour tout entier naturel n on a $u_n = \exp(-n+2)\exp(3n-2)$ donc $u_n = \exp(-n+2+3n-2) = \exp(2n) = (\exp(2))^n$.
  La suite (u_n) est donc géométrique de raison $\exp(2)$ et de premier terme $u_0 = \exp(-2)\exp(2) = \exp(0) = 1$.

Barbazo, exercice 12 p. 192 Question 3

Pour chaque suite définie par son terme général, on démontre qu'elle est géométrique et on précise son premier terme et sa raison :

- Pour tout entier naturel n on a $u_n = \frac{exp(1)}{\exp(3n+1)}$ donc $u_n = \frac{exp(1)}{\exp(1)\exp(3n)} = \frac{1}{\exp(3n)}$.
  On en déduit que $u_n = \left(\frac{1}{\exp(3)}\right)^n = (\exp(-3))^n$.
  La suite (u_n) est donc géométrique de raison $\exp(-3)$ et de premier terme $u_0 = 1$.

Barbazo, exercice 15 p. 192 Question 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5\mathrm{e}^{-4x}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = (-5) \times (-4)\mathrm{e}^{-4x} = 20\mathrm{e}^{-4x}$$

Pour tout réel x, on a $20 > 0$ et $\mathrm{e}^{-4x} > 0$, donc $f'(x) > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Barbazo, exercice 15 p. 192 Question 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5\mathrm{e}^{-4x}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = (-5) \times (-4)\mathrm{e}^{-4x} = 20\mathrm{e}^{-4x}$$

Pour tout réel x, on a $20 > 0$ et $\mathrm{e}^{-4x} > 0$, donc $f'(x) > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Barbazo, exercice 15 p. 192 Question 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-x+1)\mathrm{e}^{3x}$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$g'(x) = (-1)\times \mathrm{e}^{3x} + 3\mathrm{e}^{3x}(-x+1) = \mathrm{e}^{3x}(-1+3(-x+1)) = \mathrm{e}^{3x}(2-3x)$$

Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{3x} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $2-3x$.
On en déduit que g' est strictement positive sur $\left]-\infty ; \frac{2}{3}\right[$, s'annule en $\frac{2}{3}$ puis est strictement négative sur $\left]\frac{2}{3} ; +\infty\right[$.
On peut conclure que g est strictement croissante sur $\left]-\infty ; \frac{2}{3}\right[$ puis strictement décroissante sur $\left]\frac{2}{3} ; +\infty\right[$.

Barbazo, exercice 18 p. 192

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \mathrm{e}^{-2x}$.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :$f'(x) = 1 - (-2)\mathrm{e}^{-2x} = 1 + 2\mathrm{e}^{-2x}$.
2. Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{-2x} > 0$ donc par produit puis somme $f'(x) > 0$.
   Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Sur le graphique ci-dessous on peut observer que f est strictement croissante (on le sait déjà) et change de signe sur $[0;1]$. On peut conjecturer que $f(x) = 0$ a une unique solution sur l'intervalle $[0;1]$.
   - $f(0,4) < 0 < f(0,5)$ donc $f(0,4) < f(\alpha) < f(0,5)$ donc $0,4 < \alpha < 0,5$ car f strictement croissante.
   - $f(0,42) < 0 < f(0,43)$ donc $f(0,42) < f(\alpha) < f(0,43)$ donc $0,42 < \alpha < 0,43$ car f strictement croissante.
   - $f(0,426) < 0 < f(0,427)$ donc $f(0,426) < f(\alpha) < f(0,427)$ donc $0,426 < \alpha < 0,427$ car f strictement croissante.

   On en déduit qu'une valeur arrondie de α à 0,01 près est 0,42.

Barbazo, exercice 18 p. 192 Algorithmique

```
from math import exp
a = 0
F = a - exp(-2*a)
while F < 0:
    a =a + 0.01
    F = a - exp(-2 * a)
print(a)
```

Ce programme affiche la première valeur de a telle que $f(a) \geqslant 0$ avec $a = k \times 0{,}01$ pour k entier naturel.
D'après la question précédente, le programme affiche $0{,}43$.

Barbazo, exercice 20 p. 193 Algorithmique

20 **1.** $e^{2x}=1 \Leftrightarrow e^{2x}=e^0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$

$\mathcal{S}=\{0\}$

2. $e^{2x}=0$. Pour tout réel x, $e^{2x}>0$.

$\mathcal{S}=\varnothing$

3. $e^{3x-1}=1 \Leftrightarrow e^{3x-1}=e^0 \Leftrightarrow 3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

$\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

4. $e^{x-1}-1=0 \Leftrightarrow e^{x-1}=1 \Leftrightarrow e^{x-1}=e^0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$\mathcal{S}=\{1\}$

Barbazo, exercice 22 p. 193 Algorithmique Partie 1

22 **1.** $e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow e^x \geqslant e^0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$

$\mathscr{S} = [0\,;+\infty[$

2. $e^{x-2} < 1 \Leftrightarrow e^{x-2} < e^0 \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

$\mathscr{S} =]-\infty\,;2[$

Barbazo, exercice 22 p. 193 Algorithmique Partie 2

3. $e^{2x+1} \geqslant 0$

$\mathcal{S} =]-\infty\,;+\infty[$

4. $e^{x-1} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow e^{x-1} \leqslant 1 \Leftrightarrow e^{x-1} \leqslant e^{0} \Leftrightarrow x - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$

$\mathcal{S} =]-\infty\,;1]$

Barbazo, exercice 25 p. 193

25 **1.** La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 2e^x + (2x+1)e^x = e^x(2x+3)$

2. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = -3e^x + (-3x-1)e^x = e^x(-3x-4)$

3. La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$h'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

4. La fonction p est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$p'(x) = -\frac{1}{2}e^x + \left(-\frac{1}{2}x+1\right)e^x = \frac{1}{2}e^x(-x+1)$$

Barbazo, exercice 26 p. 194

26 **1.** La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x-5)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(-x+6)$
2. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$g'(x) = 4\mathrm{e}^{2x} + 2(4x+2)\mathrm{e}^{2x} = 8\mathrm{e}^{2x}(x+1)$
3. La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$h'(x) = 3\mathrm{e}^{-2x} - 2\left(3x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x} = 2\mathrm{e}^{-2x}(-3x+2)$
4. La fonction p est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$p'(x) = -\frac{5}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2}x+4\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\left(\frac{5}{2}x+1\right)$

Barbazo, exercice 17 p. 193

17 **1.** Pour tout réel x, $f'(x) = 1 - e^x$.

2. On étudie le signe de la dérivée f'. Pour tout réel x, $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$. La fonction g est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

La fonction f admet un maximum en $x = 0$, la valeur du maximum est $f(0)$.

Or, $f(0) = -1 - e^0 = -1 - 1 = -2$. Le maximum de la fonction f est -2.

3. Il semble que la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g est toujours au-dessus de $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de la fonction h.

D'après la question **2**, pour tout x, la fonction f est strictement négative.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow h(x) - g(x) < 0 \Leftrightarrow h(x) < g(x)$. La courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g est toujours au-dessus de $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de la fonction h.

Barbazo, exercice 43 p. 196

43 **1.** Graphiquement, il semble que le taux d'alcool dans le sang passe en dessous de 0,25 g/L environ 3 heures après l'ingestion.

2. $f(9{,}8) \approx 1{,}1 \times 10^{-3}$; $f(9{,}9) \approx 9{,}9 \times 10^{-4}$. Le taux d'alcool dans le sang est négligeable au bout de 9,9 heures.

3. Pour tout réel $t \in [0{,}025\,;+\infty[$, on a :

$$f'(t) = 2\mathrm{e}^{-t} - (2t - 0{,}05)\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t}(-2t + 2{,}05).$$

4. Pour tout réel $t \in [0{,}025\,;+\infty[$,

$\mathrm{e}^{-t} > 0$ et $-2t + 2{,}05 \geqslant 0 \Leftrightarrow t \leqslant 1{,}025$.

La fonction f' est positive sur $[0{,}025\,;1{,}025]$ et négative sur $[1{,}025\,;+\infty[$. On en déduit que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0{,}025\,;1{,}025]$ et décroissante sur $[1{,}025\,;+\infty[$.

La fonction f admet un maximum atteint pour $t = 1{,}025$.

$f(1{,}025) = (2 \times 1{,}025 - 0{,}05)\mathrm{e}^{-1{,}025} = 2\mathrm{e}^{-1{,}025} \approx 0{,}72$. Le taux maximum d'alcool dans le sang est de $2\mathrm{e}^{-1{,}025}$ g/L soit environ 0,72 g/L.

Barbazo, exercice 55 p. 197

55 **1.** Réponses **b** et **c**.
2. Réponse **b**.
3. Réponse **b**.
4. Réponse **a**.
5. Réponse **a**.

Exercice de synthèse : énoncé

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;10]$ par $f(x) = 5\mathrm{e}^{-0,4x}$.
Dans un repère orthogonal du plan on considère sa courbe $\mathscr{C}_f$ et le rectangle $OABC$ où O est l'origine du repère, B un point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x avec $x \in [0;10]$, C le projeté orthogonal de B sur l'axe des abscisses et A le projeté orthogonal de B sur l'axe des ordonnées.
Voir la figure animée sur https://www.geogebra.org/m/uqbmfhuj.

1. Justifier que pour tout réel $x \in [0;10]$, l'aire du rectangle $OABC$ est égale à $g(x) = xf(x)$.
2. Démontrer qu'une expression de la fonction dérivée de la fonction g est $g'(x) = (5-2x)\mathrm{e}^{-0,4x}$.
3. Étudier les variations de g sur l'intervalle $[0;10]$.
4. En déduire l'aire maximale du rectangle $OABC$.

Exercice de synthèse : réponse

1. L'aire du rectangle $OABC$ est égale à $OC \times OA = xf(x)$.
2. Soit la fonction g définie pour tout réel $x \in [0\,;10]$ par $g(x) = xf(x) = 5x\mathrm{e}^{-0,4x}$. g est dérivable sur $[0\,;10]$ et pour tout $x \in [0\,;10]$, on a :

$$g'(x) = 5\mathrm{e}^{-0,4x} + 5x \times (-0,4)\mathrm{e}^{-0,4x} = \mathrm{e}^{-0,4x}(5-2x)$$

3.

x	0		$\frac{5}{2}$		10
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$12,5\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	$5\mathrm{e}^{-4}$

4. En déduire l'aire maximale du rectangle $OABC$ est donc égale à $\frac{25}{2}\mathrm{e}^{-1}$.