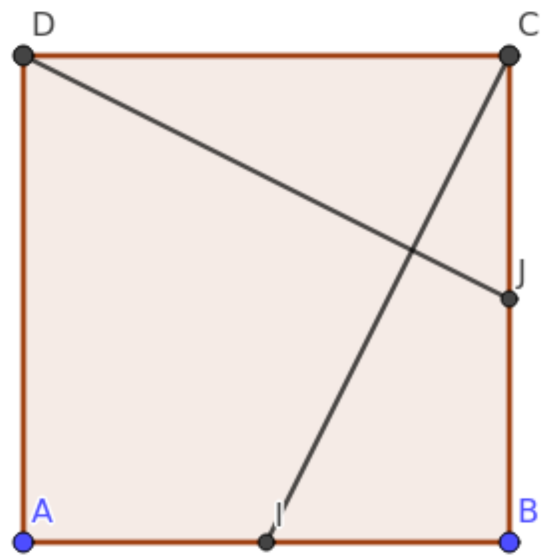
Application de la bilinéarité du produit scalaire



ABCD est un carré tel que I et J sont les milieux des cotés [AB] et [BC].

Démontrer que les droites (CI) et (DJ) sont perpendiculaires.

Solution : On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ}$.

On décompose $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{DJ}$ avec la relation de Chasles.

$\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI}) \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ})$

On développe avec la propriété de bilinéarité

$\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CJ}$

Or $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DC}$ orthogonaux donc $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$

de même $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ orthogonaux donc $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CJ} = 0$

On en déduit que :

$$\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{DC}$$

- $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont colinéaires et de même sens donc :
$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CJ} = CB \times CJ = CB \times \frac{1}{2} CB = \frac{1}{2} CB^2$

- $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires et de sens opposés, donc $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{DC} = -BI \times DC = -\frac{CD}{2} \times CD = -\frac{1}{2} CD^2$

On a donc $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2} CB^2 - \frac{1}{2} CD^2$

Or ABCD est un carré donc $CB = CD$

On en déduit que $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ} = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{DJ}$ sont donc orthogonaux et les droites (CI) et (DJ) sont perpendiculaires.