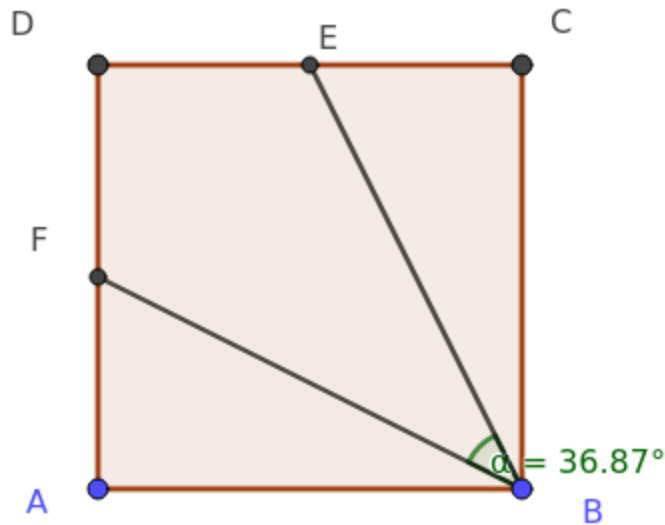


Application de la bilinéarité



ABCD est un carré de côté 4.

E est le milieu de $[DC]$ et F est le milieu de $[AD]$.

1) Les triangles BCE et BAF sont rectangles respectivement en C et en A et les côtés des angles droits ont même mesure 4 et 2. Les triangles BCE et BAF sont donc superposables (ou isométriques).

On a donc $BF = BE$.

On calcule BF en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle BAF.

$$BF^2 = BA^2 + AF^2$$

On a donc $BF^2 = 4^2 + 2^2 = 20$

BF est une longueur positive, donc;

$$BF = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

2) Calculons $\vec{BF} \cdot \vec{BE}$ avec la formule des cosinus:

$$\vec{BF} \cdot \vec{BE} = BE \times BF \times \cos(\widehat{EBF})$$

$$\vec{BF} \cdot \vec{BE} = \sqrt{20}^2 \times \cos(\widehat{EBF}) = 20 \cos(\widehat{EBF})$$

3) Décomposons les vecteurs \vec{BE} et \vec{BF} :

$$\vec{BE} = \vec{BC} + \vec{CE} \quad \text{et} \quad \vec{BF} = \vec{BA} + \vec{AF}$$

On peut appliquer les propriétés de bilinéarité:

$$\vec{BE} \cdot \vec{BF} = (\vec{BC} + \vec{CE}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AF})$$

$$\vec{BE} \cdot \vec{BF} = \vec{BC} \cdot \vec{BA} + \vec{BC} \cdot \vec{AF} + \vec{CE} \cdot \vec{BA} + \vec{CE} \cdot \vec{AF}$$

\vec{BC} et \vec{BA} sont orthogonaux donc $\vec{BC} \cdot \vec{BA} = 0$
 \vec{CE} et \vec{AF} sont orthogonaux donc $\vec{CE} \cdot \vec{AF} = 0$

On a donc $\vec{BE} \cdot \vec{BF} = \vec{CE} \cdot \vec{BA} + \vec{BC} \cdot \vec{AF}$

\vec{BC} et \vec{AF} sont colinéaires et de même sens
 $\vec{BC} \cdot \vec{AF} = BC \times AF = 4 \times 2 = 8$

\overrightarrow{CE} et \overrightarrow{BA} colinéaires et de même sens
donc $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BA} = CE \times BA = 2 \times 4 = 8$

On en déduit que :

$$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BF} = 8 + 8 = 16$$

4) On déduit des questions 2) et 3) que :

$$20 \cos(\widehat{EBF}) = \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BF} = 16$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{EBF}) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

Avec la fonction arccosinus de la calculatrice, on en déduit que :

$$\widehat{EBF} = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) \approx 37^\circ$$