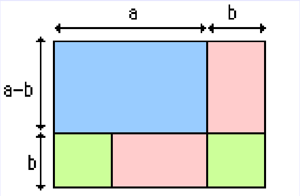
Histoire 1

☞ 4000 ans avant nous, les Babyloniens écrivaient des mathématiques en cunéiformes sur des tablettes d'argiles. Ils comptaient en base 60 que nous retrouvons dans notre système de mesure du temps. Ils connaissaient le théorème de Pythagore et savaient extraire des racines carrées. Retrouver l'égalité qu'ils utilisaient pour multiplier deux nombres a et b : $a \times b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

☞ Al-Khwarizmi est un mathématicien persan du neuvième siècle qui a écrit un important ouvrage posant les fondements de l'algèbre (de l'arabe *al jabr* pour réduction) et de la résolution des équations du second degré avec un système de numération décimal positionnel inspiré des Indiens. Le mot *algorithme* formé sur son nom nous est resté. Quelle égalité remarquable cette figure tirée de son ouvrage permet-elle de démontrer ?



1 Fonction polynôme du second degré et parabole

1.1 Définition

Définition 1

Une **fonction polynôme du second degré** (ou fonction trinôme) est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe des constantes a (avec $a \neq 0$), b et c telles que $\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$.
Cette forme s'appelle la **forme développée** de la fonction polynôme du second degré f.
Les réels a, b et c sont les **coefficients** de la fonction polynôme du second degré f.
La courbe d'une fonction polynôme du second degré s'appelle une **parabole**.

Capacité 1 *Identifier les coefficients d'un trinôme*

Reconnaître les fonctions polynômes du second degré et déterminer les coefficients a, b et c de leur forme développée :

- $f : x \mapsto x^2$
- $g : x \mapsto 5x + 3 - x^2$
- $h : x \mapsto (2x-1)(x+3)$
- $j : x \mapsto x^2 - (x-1)^2$
- $k : x \mapsto (1-x)^2 + (x-1)^2$
- $l : x \mapsto (2x+1)^2 - (x-3)^2$

1.2 Axe de symétrie d'une parabole

Propriété 1

Soit f une fonction polynôme du second degré.

1. Il existe un unique couple de réels $\boxed{(\alpha\,;\beta)}$ tels que pour tout réel x, $\boxed{f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta}$.
2. Dans un repère du plan, la parabole représentant f a pour **axe de symétrie** la droite d'équation $\boxed{x=\alpha}$ et $(\alpha\,;\beta)$ est le couple de coordonnées du sommet S de la parabole.
3. Si la forme développée de f est $f(x) = ax^2+bx+c$ alors $\boxed{\alpha = -\dfrac{b}{2a}}$.

1.3 Variations d'une fonction polynôme du second degré

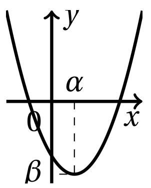
Propriété 2

Soit $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ (avec $a \neq 0$) une fonction polynôme du second degré.

Soit $\boxed{(\alpha\,;\beta)}$ les coordonnées du sommet de la parabole représentant f dans un repère avec $\boxed{\alpha = -\dfrac{b}{2a}}$.

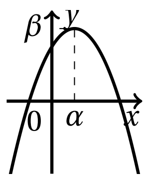
- Si $\boxed{\boldsymbol{a>0}}$, f est **décroissante** sur $]-\infty\,;\alpha]$ puis **croissante** sur $[\alpha\,;+\infty[$.
- Si $\boxed{\boldsymbol{a<0}}$, f est **croissante** sur $]-\infty\,;\alpha]$ puis **décroissante** sur $[\alpha\,;+\infty[$.

$\boxed{\boldsymbol{a>0}}$



x	$-\infty$		$\alpha = \dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		↘	$f(\alpha)$	↗	

$\boxed{\boldsymbol{a<0}}$



x	$-\infty$		$\alpha = \dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		↗	$f(\alpha)$	↘	

Capacité 2 *Étudier les variations d'un trinôme*

Une entreprise produit des panneaux solaires. Une étude de marché permet d'estimer que la production pour le mois à venir est comprise entre 1 500 et 3 000 panneaux solaires. On s'intéresse au bénéfice de l'entreprise sur la vente des panneaux solaires produits.
Pour x centaines de panneaux produits, on note $f(x)$ le bénéfice réalisé, en centaines d'euro.
On décide de modéliser l'évolution du bénéfice de l'entreprise, par :

$$f(x) = -2x^2 + 90x - 400, \quad \text{pour } x \in [15\,;\,30]$$

1. En justifiant, dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[15;30]$.
2. Déterminer le nombre de panneaux solaires qu'il faut vendre pour réaliser un bénéfice maximal. Quelle est alors sa valeur à l'euro près ?

2 Forme factorisée et racines

2.1 Racines

Définition 2

Soit f une fonction polynôme du second degré.
Les réels x solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les **racines** de f.
Dans un repère, ce sont les abscisses des points d'intersection de la parabole de f avec l'axe des abscisses.

Propriété 3

Soit f une fonction polynôme du second degré de forme développée $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Si f a deux racines distinctes x_1 et x_2 alors f peut s'écrire sous **forme factorisée** $\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$.

Démonstration

Soit f de forme développée $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $x \in \mathbb{R}$

Si x_1 racine de f alors $f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c = 0$

Pour tout réel x : $f(x) = f(x) - 0 = f(x) - f(x_1)$

donc $f(x) = a(x^2 - x_1^2) + b(x - x_1)$

$f(x) = (x - x_1)(a(x + x_1) + b)$

De plus $f(x_2) = 0$ et $x_2 \neq x_1$ donc d'après la règle du produit nul : $ax_2 + ax_1 + b = 0 \iff ax_1 + b = -ax_2$

On a donc $f(x) = (x - x_1)(ax - ax_2) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Capacité 3 *Déterminer les trinômes s'annulant en deux nombres*

1. Déterminer les fonctions polynômes du second degré dont les racines sont -1 et 2.
2. Déterminer la fonction polynôme du second degré dont la parabole coupe l'axe des abscisses du repère aux abscisses -2 et 1 et l'axe des ordonnées en l'ordonnée 6.
3. Déterminer la fonction polynôme du second degré dont la parabole coupe l'axe des abscisses du repère aux abscisses -6 et 8 et dont le maximum est 10.

2.2 Somme et produit des racines

Propriété 4

Soit f une fonction polynôme du second degré de forme développée $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Si f a deux racines distinctes x_1 et x_2 alors la somme S et le produit P des racines sont donnés par :

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \quad \text{et} \quad \boxed{P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$$

Démonstration *voir exo 23 page 66*

Pour tout réel x on a d'après la propriété 3 :

$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

On exprime $f(0)$ et $f(1)$ avec les formes développée et factorisée

$f(0)=ax_1x_2$ et $f(0)=a\times 0^2+b\times 0+c$

donc $ax_1x_2=c \iff \boxed{x_1x_2=\frac{c}{a}}$ car $a\neq 0$

De même $f(1)=a(1-x_1)(1-x_2)=a-a(x_1+x_2)+ax_1x_2$

et $f(1)=a+b+c$. D'après ce qui précède, on a donc :

$a-a(x_1+x_2)+ax_1x_2=a+b+c \iff \boxed{-\frac{b}{a}=x_1+x_2}$

Capacité 4 *Factoriser une fonction polynôme du second degré*

1. Déterminer une racine évidente de la fonction polynôme du second degré $f : x \mapsto x^2 + 5x - 6$. En déduire une autre racine à l'aide des propriétés des racines puis factoriser $f(x)$.
2. Déterminer une racine évidente de la fonction polynôme du second degré $g : x \mapsto -2x^2 + 5x + 18$. En déduire une autre racine à l'aide des propriétés des racines puis factoriser $g(x)$.

2.3 Signe d'une fonction polynôme du second degré sous forme factorisée

Propriété 5

Soit f une fonction polynôme du second degré de forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 \leqslant x_2$.

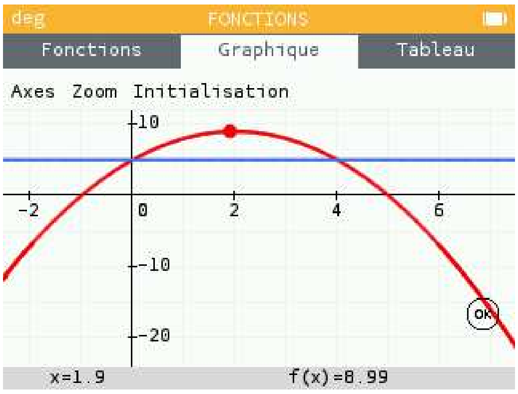
- f est du signe de a à l'extérieur des racines, sur $]-\infty ; x_1[\cup]x_2 ; +\infty[$.
- f est du signe de $-a$ à l'intérieur des racines, sur $]x_1 ; x_2[$.

Démonstration

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		signe de a		signe de a		signe de a	
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$a(x-x_1)(x-x_2)$		signe de a	0	$-$ signe de a	0	signe de a	

Capacité 5 ***Choisir une forme adaptée selon le problème à résoudre***

Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9 - (x-2)^2$.
On a représenté ci-dessous avec une calculatrice, dans un même repère, la courbe de f et la droite d'équation $y = 5$.



1. Factoriser $f(x)$.
2. Développer et réduire $f(x)$.
3. **a.** À partir du graphique, émettre une conjecture sur les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$.
   b. Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) > 0$ en choisissant une forme adaptée.
4. **a.** À partir du graphique, émettre une conjecture sur les solutions de l'équation $f(x) = 5$.

b. Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 5$ en choisissant une forme adaptée.

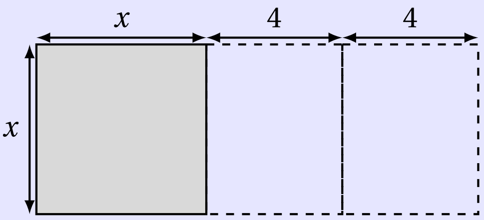
3 Forme canonique et résolution de l'équation générale du second degré

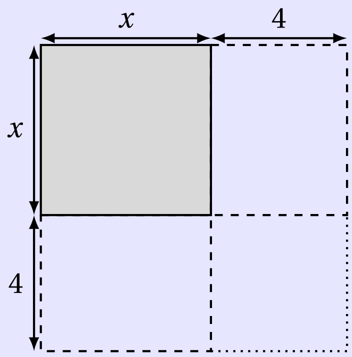
3.1 Méthode de complétion du carré

Histoire 2

Dans son traité du IX$^{\text{ième}}$ siècle, le mathématicien *Al-Khwarizmi* propose un algorithme qui permet de déterminer la solution positive de l'équation du second degré du type $x^2 + ax = b$ où a et b sont des réels positifs.Par exemple, pour résoudre l'équation $x^2 + 8x = 65$ c'est-à-dire que *le carré et huit racines égalent soixante cinq*, il procède ainsi :

> *On divise les racines en deux moitiés. Ici, on obtient quatre, qu'on multiplie par lui-même, on a seize, qu'on ajoute à soixante cinq et on obtient quatre vingt un.*
>
> *On prend la racine qui est* 9*, on lui retranche la moitié du nombre des racines qui est quatre, il en vient cinq qui est la racine que l'on cherche.*





1. Indiquer les aires des différentes parties sur les figures ci-dessus afin d'expliquer pourquoi l'algorithme d'*Al-Khwarizmi* permet de déterminer la solution positive de l'équation $x^2 + 8x = 65$.

2. Appliquer cet algorithme pour résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$.

3. Soit deux réels a et b tels que $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ et soit l'équation $x^2 + ax = b$ qu'on appelle (E).

   Compléter la fonction `Python` pour qu'elle retourne la solution positive de l'équation (E) déterminée par l'algorithme d'*Al-Khwarizmi*.

```python
from math import sqrt

def alkhwarizmi(a, b):
    moitieRacine = a / 2
    carreMoitie = .........
    carreComplete = ........
    return ...........
```

Propriété 6

Pour tous réels x et k, on a $x^2+2kx=(x+k)^2-k^2$.

Démonstration

Pour tous réels x et k :

$(x+k)^2 - k^2 = x^2+2kx+k^2 - k^2 = x^2+2kx$

3.2 Mise sous forme canonique

Propriété 7

Soit f une fonction polynôme du second degré de forme développée $f(x)=ax^2+bx+c$.
La **forme canonique** de f s'exprime ainsi :

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

En notant la forme canonique $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ on obtient $\boxed{\alpha=-\frac{b}{2a}}$.

Démonstration

Pour tout réel x ; on a :

$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$

$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = ax^2+bx+\frac{4a^2c}{4a^2}$

$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right) - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = ax^2+bx+c = f(x)$

L'égalité est démontrée

Définition 3

Soit f une fonction polynôme du second degré de forme développée $f(x)=ax^2+bx+c$.
Le **discriminant** de f est $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$, il apparaît dans la forme canonique de f.

Capacité 6 ***Mettre sous forme canonique***

Déterminer la forme canonique de ces fonctions polynômes du second degré :

- $f : x \mapsto x^2 + 16x$
- $g : x \mapsto x^2 - 12x + 5$
- $h : x \mapsto 2x^2 - 12x + 6$

3.3 Résolution de l'équation générale du second degré

Théorème 1 ***Théorème fondamental***

Soit f une fonction polynôme du second degré de forme développée $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Le nombre de racines de f et donc de solutions réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe du discriminant $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$.
On distingue trois cas :

	$\boldsymbol{\Delta < 0}$	$\boldsymbol{\Delta = 0}$	$\boldsymbol{\Delta > 0}$
Racine(s) réelles de f	Pas de racine réelle	Une seule racine réelle : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	Deux racines réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Factorisation de $f(x)$ dans $\mathbb{R}$	Pas de factorisation	$f(x) = a(x - x_0)^2$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Démonstration

D'après la propriété de la forme canonique :
et la définition du discriminant :

$$f(x) = 0 \iff a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = 0$$

$$f(x) = 0 \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad \text{car } a \neq 0$$

On raisonne par disjonction des cas :

1er cas : $\Delta < 0$

L'équation $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ n'a pas de solution
car un carré n'est jamais négatif.
Supposons que $f(x)$ se factorise.

D'après la règle du produit nul, $f(x)=0$ aurait- moins une solution, ce qui est en contradiction avec ce qu'on vient de démontrer. Par l'absurde on en déduit que $f(x)$ ne se factorise pas.

2ème cas : $\Delta = 0$

$f(x)=0 \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \iff x = -\frac{b}{2a}$

et $f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ a une forme canonique qui est une forme factorisée

3ème cas : $\Delta > 0$ $f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ se factorise

en $f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

Capacité 7 *Résoudre une équation du second degré*

1. Résoudre dans ℝ les équations du second degré suivantes :

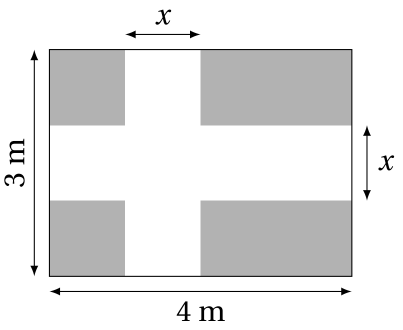
(fin de la preuve) : $f(x)=0 \iff x = -\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

   a. $2x(x+1) = x^2+3x$
   b. $x^2-2x-3=0$
   c. $x^2 = x+1$
   d. $-(2x)^2-4x=-4$
   e. $x^2=4$
   f. $3x^2+2x+\frac{1}{3}=0$
   g. $2x^2+5=7$
   h. $x^2=x-1$
   i. $(3x+1)^2=(3-x)^2$
   j. $3x^2+1=0$
   k. $4x+1=3x^2$

2. Afin de financer la transition énergétique, la taxe sur les carburants vient de subir deux augmentations mensuelles successives de t % où t est un réel positif.

   Déterminer la valeur de t arrondie à 0,1 % près, sachant que le taux d'augmentation global de la taxe sur les carburants a été de 60 % en deux mois.

3. Quelle valeur x doit prendre la largeur de la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau ?



Capacité 8 *Factoriser une fonction polynôme du second degré*

Déterminer les formes factorisées, si c'est possible, des fonctions polynômes du second degré :

- $f : x \mapsto 3x^2+11x-4$
- $g : x \mapsto 2x^2+4x-6$
- $h : x \mapsto 2x^2+5x+6$

Algorithmique 1 *Algorithme de résolution d'une équation du second degré*

1. Compléter cette fonction `Python` pour qu'elle retourne les racines réelles de $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

```
from math import sqrt

def racineTrinome(a, b, c):
    delta = .........
    if delta > 0:
        x1 = ................
        x2 = .................
        return (x1, x2)
    elif delta .... 0:
        return ()
    else:
        x0 = ........
        return (x0,)
```

2. Que retourne l'appel de fonction `racineTrinome(1, -5, 6)` ?
3. Corrigé téléchargeable : `https://workshop.numworks.com/python/frederic-junier/trinome`.

3.4 Signe d'une fonction polynôme du second degré

Propriété 8

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ polynôme du second degré de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta > 0$, en notant x_1 et x_2 les racines de f (avec $x_1 < x_2$), on a :
   - **a.** f est du signe de a « à l'extérieur des racines », sur $]-\infty ; x_1[\cup]x_2 ; +\infty[$.
   - **b.** f est du signe contraire de a « à l'intérieur des racines », sur $]x_1 ; x_2[$.
2. Si $\Delta = 0$, en notant x_0 la racine double de f, alors f est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et s'annule uniquement en x_0
3. Si $\Delta < 0$, alors f est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

On raisonne par disjonction des cas, pour tout réel x.

1er cas : $\Delta > 0$ donc $f(x)$ se factorise en :

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

et on applique la propriété 5

2ème cas : $\Delta = 0$ donc $f(x) = a(x - x_1)^2$

et $f(x)$ est du signe de a et s'annule en x_1

<u>3ème cas</u> : $\Delta < 0$ D'après la propriété de la forme canonique on a $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$. On distingue ensuite 2 sous cas et on utilise la propriété des variations :

* si $a > 0$, $f\left(-\frac{b}{2a}\right) > 0$ et c'est le minimum de f

* si $a < 0$, $f(-b/2a) < 0$ et c'est le maximum de f

Capacité 9 *Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré*

1. Étudier le signe sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes du second degré :

   - $f : x \mapsto 2x^2 - 3x - 2$
   - $g : x \mapsto -4x^2 + 2x - 7$
   - $h : x \mapsto \frac{4}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}$

2. Une entreprise peut produire quotidiennement entre 1 et 20 tonnes de peinture.

   Le coût de production, en millier d'euros, de x tonnes de peinture est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[1\,;\,20]$ par $C(x) = 0{,}05x^2 - 0{,}1x + 2{,}45$. Le prix de vente d'une tonne de peinture est de 670 €. Toute la production est vendue.

   a. Pour x tonnes de peinture produites, déterminer l'expression du bénéfice $B(x)$ réalisé.

   b. Déterminer les quantités produites qui permettent de réaliser un bénéfice positif.

Logique 1 *Quantificateurs, contre-exemples et implications*

1. Soit f une fonction polynôme du second degré de discriminant $\Delta < 0$ et dont le coefficient de x^2 est positif.

   Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est *vraie* ou *fausse* en justifiant.

   ☞ Pour tout réel x, on a $f(x) > 0$.

   ☞ Il existe un réel x tel que $f(x) \leqslant 0$.

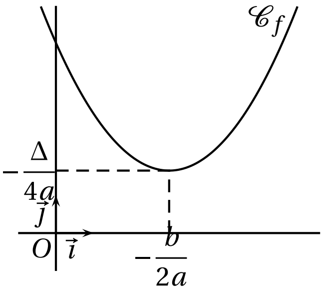
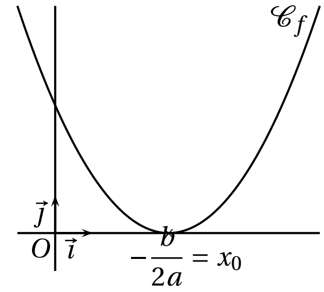
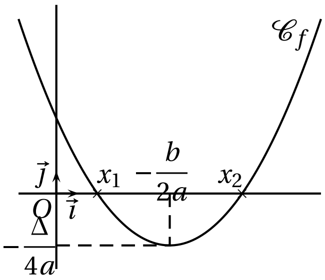
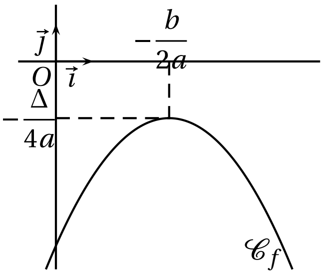
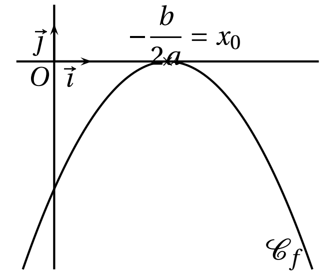
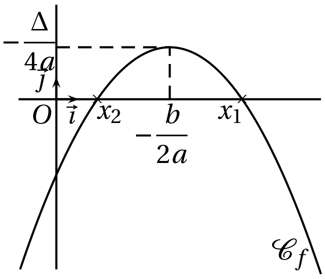
2. Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré de discriminant Δ.

   Pour chacune des implications suivantes, déterminer d'abord si elle est *vraie* ou *fausse* en justifiant, puis énoncer sa réciproque et déterminer si elle est *vraie* ou *fausse*.

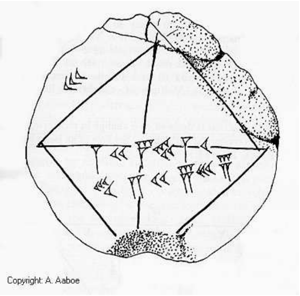
   ☞ Si pour tout réel x on a $f(x) > 0$, alors $\Delta < 0$.

   ☞ Si $ac < 0$ alors $\Delta > 0$.

Propriété 9 *Tableau synoptique*

	$\boldsymbol{\Delta < 0}$	$\boldsymbol{\Delta = 0}$	$\boldsymbol{\Delta > 0}$
Racine(s) réelles de f	Pas de racine réelle	Une seule racine réelle : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	Deux racines réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Factorisation de $f(x)$ dans $\mathbb{R}$	Pas de factorisation	$f(x) = a(x-x_0)^2$	$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$
Courbe représentative de f et signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ lorsque $a > 0$	 x : $-\infty$ $+\infty$ $f(x)$: $+$	 x : $-\infty$ x_0 $+\infty$ $f(x)$: $+$ 0 $+$	 x : $-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$ $f(x)$: $+$ 0 $-$ 0 $+$
Courbe représentative de f et signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ lorsque $a < 0$	 x : $-\infty$ $+\infty$ $f(x)$: $-$	 x : $-\infty$ x_0 $+\infty$ $f(x)$: $-$ 0 $-$	 x : $-\infty$ x_2 x_1 $+\infty$ $f(x)$: $-$ 0 $+$ 0 $-$

Approximation babylonienne de $\sqrt{2}$.



Source : http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath/tablets/YBC7289.html

Capacité 8 *Factoriser une fonction polynôme du second degré*

Déterminer les formes factorisées, si c'est possible, des fonctions polynômes du second degré :

- $f : x \mapsto 3x^2 + 11x - 4$
- $g : x \mapsto 2x^2 + 4x - 6$
- $h : x \mapsto 2x^2 + 5x + 6$

Pour déterminer les formes factorisées, il faut et il suffit de déterminer les racines.

- $f : x \mapsto 3x^2 + 11x - 4$

$a = 3 \qquad b = 11 \qquad c = -4$

$\Delta = b^2 - 4ac = 11^2 - 4\times(-4)\times 3 = 121 + 16\times 3 = 169 = 13^2$

$\Delta > 0$ donc f a deux racines distinctes.

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-11-13}{2\times 3} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-11+13}{2\times 3} = \dfrac{1}{3}$

On en déduit la forme factorisée de $f(x)$, pour tout réel x :

$$\boxed{f(x) = 3\,(x-(-4))\,(x-\tfrac{1}{3}) = 3(x+4)\,(x-\tfrac{1}{3})}$$

- $g : x \mapsto 2x^2 + 4x - 6$

$a = 2 \qquad b = 4 \qquad c = -6$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\times 2\times(-6) = 16 + 8\times 6 = 64$

$\Delta > 0$ donc g a 2 racines distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-\sqrt{64}}{2\times 2} = \dfrac{-12}{4} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\times 2} = \dfrac{4}{4} = 1$

On en déduit la forme factorisée de $g(x)$, pour tout réel x :

$$\boxed{g(x) = 2\times\,(x-(-3))(x-1) = 2(x+3)(x-1)}$$

- $h : x \mapsto 2x^2 + 5x + 6$

$a = 2 \qquad b = 5 \qquad c = 6$

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4\times 2\times 6 = 25 - 48 = -23$

$\boxed{\Delta < 0 \text{ donc } h \text{ ne se factorise pas.}}$

Capacité 9 *Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré*

1. Étudier le signe sur ℝ des fonctions polynômes du second degré :

- $f : x \longmapsto 2x^2 - 3x - 2$
- $g : x \longmapsto -4x^2 + 2x - 7$
- $h : x \longmapsto \frac{4}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}$

2. Une entreprise peut produire quotidiennement entre 1 et 20 tonnes de peinture.

Le coût de production, en millier d'euros, de x tonnes de peinture est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[1 ; 20]$ par $C(x) = 0,05x^2 - 0,1x + 2,45$. Le prix de vente d'une tonne de peinture est de 670 €. Toute la production est vendue.

a. Pour x tonnes de peinture produites, déterminer l'expression du bénéfice $B(x)$ réalisé.

b. Déterminer les quantités produites qui permettent de réaliser un bénéfice positif.

1) • $f : x \mapsto 2x^2 - 3x - 2$

$a = 2 \quad b = -3 \quad c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25$

$\Delta > 0$ donc f a deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{25}}{2\times 2} = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{25}}{4} = 2$

On applique la règle du signe d'un trinôme :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2-3x-2$		+ signe de a	0	− signe de −a	0	+ signe de a	

• $g : x \mapsto -4x^2 + 2x - 7$

$a = -4 \quad b = 2 \quad c = -7$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-4) \times (-7) = 4 + 16 \times 7 = 116$

$\Delta > 0$ donc g a deux racines distinctes

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{116}}{2\times(-4)} = \frac{-2-2\sqrt{29}}{2\times(-4)} = \frac{1+\sqrt{29}}{4}$

et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{116}}{2\times(-4)} = \frac{1-\sqrt{29}}{4}$

On applique la règle du signe d'un trinôme :

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{29}}{4}$		$\frac{1+\sqrt{29}}{4}$		$+\infty$
$-4x^2+2x-7$		− signe de a	0	+ signe de −a	0	− signe de a	

• $h : x \mapsto \frac{4}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}$

$a = \frac{4}{9} \quad b = -\frac{2}{3} \quad c = \frac{1}{4}$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{4} = 0$

$\Delta = 0$ donc h a une racine double $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{2}{3}}{2 \times \frac{4}{9}} = \frac{3}{4}$

On applique la règle du signe d'un trinôme:

x	$-\infty$		$3/4$		$+\infty$
$\frac{4}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}$		+	0	+	

2) a) Pour tout $x \in [1;20]$, on a

Bénéfice = Recette − Coût

donc $B(x) = 0,67x - (0,05x^2 - 0,1x + 2,45)$

$$\boxed{B(x) = -0,05x^2 + 0,77x - 2,45}$$

b) On détermine les racines de la fonction trinôme bénéfice B.

$a = -0,05 \quad b = 0,77 \quad c = -2,45$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0,77^2 - 4 \times (-0,05) \times (-2,45)$

$\Delta = 0,1029$

$\Delta > 0$ donc B a deux racines distinctes:

• $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \approx 10,91$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \approx 4,49$

On en déduit le tableau de signes du trinôme.

x	1		x_2		x_1		20
$B(x)$		− signe de a	0	+ signe de −a	0	− signe de a	

$\boxed{\text{L'entreprise réalise un bénéfice pour une production } x \in]x_2 ; x_1[.}$

Logique 1 ***Quantificateurs, contre-exemples et implications***

1. Soit f une fonction polynôme du second degré de discriminant $\Delta < 0$ et dont le coefficient de x^2 est positif.

   Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est *vraie* ou *fausse* en justifiant.

   - ☞ Pour tout réel x, on a $f(x) > 0$.
   - ☞ Il existe un réel x tel que $f(x) \leqslant 0$.

2. Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré de discriminant Δ.

   Pour chacune des implications suivantes, déterminer d'abord si elle est *vraie* ou *fausse* en justifiant, puis énoncer sa réciproque et déterminer si elle est *vraie* ou *fausse*.

   - ☞ Pour tout réel x, si on a $f(x) > 0$, alors $\Delta < 0$.
   - ☞ Si $ac < 0$ alors $\Delta > 0$.

1) Soit f une fonction polynôme du second degré de discriminant $\Delta < 0$ et dont le coefficient a de x^2 est positif.

D'après la règle du signe d'un trinôme :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	

Pour tout réel x on a $f(x) > 0$
et il n'existe pas de réel x tel que $f(x) \leq 0$

- ☞ Pour tout réel x, on a $f(x) > 0$. → Vraie
- ☞ Il existe un réel x tel que $f(x) \leqslant 0$. → Faux

2)

- Si pour tout réel x on a $f(x) > 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution et $\Delta < 0$.

Rque : L'affirmation est mal formulée. On aurait dû écrire : "Si pour tout réel x on a $f(x) > 0$ alors $\Delta < 0$"

- La réciproque se formule ainsi :

"Si $\Delta < 0$ alors pour tout réel x on a $f(x) > 0$"

Elle est fausse comme le prouve le contre-exemple de la fonction $f : x \mapsto -x^2 - 1$.

. L'implication "Si $ac < 0$ alors $\Delta > 0$" est vraie.

Preuve:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$ac < 0$ donc $-4ac > 0$

de plus $b^2 \geq 0$

donc $b^2 - 4ac > 0$.

donc $\Delta > 0$.

L'implication est donc vraie.