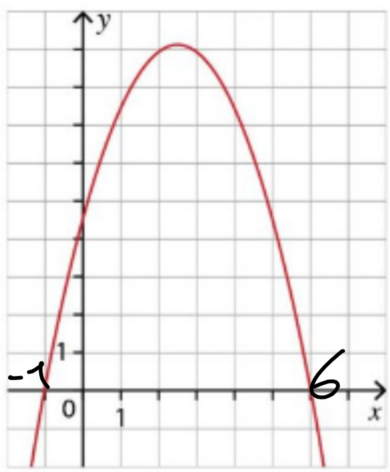
Chapitre second degré.
Corrigé d'exercices

Exercice 2 p. 64

2 La parabole ci-dessous tracée dans un repère orthonormé, représente une fonction polynôme du second degré f.

• Utiliser le graphique pour déterminer la forme factorisée de $f(x)$.



Graphiquement $f(x) = 0$ a pour solutions $x = -1$ ou $x = 6$, les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

On en déduit qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x :

$$f(x) = a(x - (-1))(x - 6)$$

De plus on lit graphiquement que :

$$f(2) = 9$$

On peut en déduire la valeur de a en résolvant une équation :

$$f(2) = 9 \iff a(2+1)(2-6) = 9$$

$$f(2) = 9 \iff -12a = 9$$

$$f(2) = 9 \iff a = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4}$$

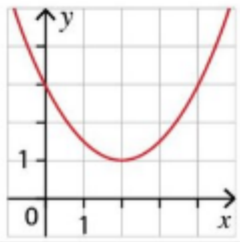
Finalement, à partir des informations du graphique, on peut conjecturer que pour tout réel x :

$$\boxed{f(x) = -\frac{3}{4}(x+1)(x-6)}$$

Exercice 3 p.64

3 La parabole ci-dessous représente une fonction polynôme du second degré f.

• Utiliser le graphique pour déterminer la forme canonique de $f(x)$.



• Graphiquement, le sommet de la parabole $\mathcal{C}_f$ est $S(2;1)$.

On en déduit que $\alpha = 2$ et $\beta = 1$.

• La forme canonique de f est alors :

$f(x) = a(x-2)^2 + 1$ avec a réel, $a \neq 0$

• Graphiquement on a $f(0) = 3$

On peut calculer a en résolvant une équation :

$$f(0) = 3 \Leftrightarrow a \times (0-2)^2 + 1 = 3$$
$$\Leftrightarrow 4a + 1 = 3$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

D'après les informations du graphique, la forme canonique de f est :

$$\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1}$$

Exercice 4 p. 64

4 **1.** Dresser le tableau de variation d'une fonction polynôme du second degré f, sachant que sa courbe représentative :
- est tournée vers le bas ;
- admet pour axe de symétrie, la droite d'équation $x = -2$;
- a son sommet sur l'axe des abscisses.

2. Proposer trois expressions de $f(x)$.

1)

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

2) Trois expressions possibles de $f(x)$:

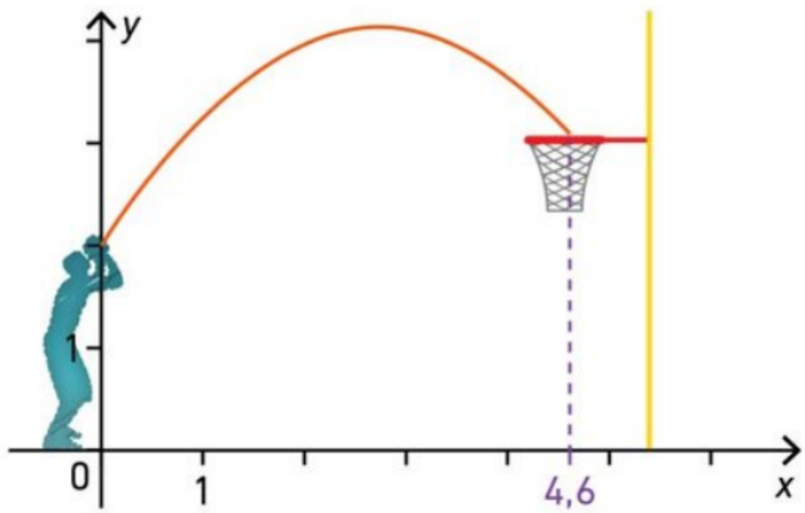
$f(x) = -(x+2)^2$

ou $f(x) = -3(x+2)^2$

ou $f(x) = -734(x+2)^2$

Exercice 14 p. 65

14 On modélise la trajectoire d'un ballon qui entre dans le panier lors d'un lancer franc au basket.



Cette trajectoire est un arc de parabole d'équation :

$$y = -0{,}3x^2 + 1{,}6x + 2.$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = -0{,}3x^2 + 1{,}6x + 2,$$

où x et f(x) sont exprimés en mètre.

1. Donner la forme canonique de f(x).
2. Quelle hauteur maximale le ballon atteint-il ?
3. Sachant que la ligne de lancer franc est à 4,6 mètres du pied du panier, quelle est la hauteur du panier ?

1) La forme développée de f est, pour tout $x \in [0;4{,}6]$

$f(x) = -0{,}3x^2 + 1{,}6x + 2$

$a = -0{,}3 \quad b = 1{,}6 \quad c = 2$

L'abscisse du sommet de la parabole est

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-1{,}6}{-0{,}6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

L'ordonnée du sommet de la parabole est

$$\beta = f(\alpha) = f\left(\frac{8}{3}\right) = -0{,}3 \times \left(\frac{8}{3}\right)^2 + 1{,}6 \times \frac{8}{3} + 2$$

$$\beta = -0{,}3 \times \frac{64}{9} + \frac{12{,}8}{3} + 2$$

$$\beta = \frac{-6{,}4}{3} + \frac{12{,}8}{3} + 2 = \frac{6{,}4}{3} + 2 = \frac{12{,}4}{3}$$

La forme canonique de f est donc :

$\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f(x) = -0{,}3\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \frac{12{,}4}{3}}$

2) $a < 0$ donc f croissante sur $[0 ; \alpha]$
et décroissante sur $[\alpha ; 4{,}6]$
f atteint donc son maximum en α
et la valeur de ce maximum est

$$\boxed{f(8/3) = \frac{12{,}4}{3} = \beta}$$

3) la hauteur du panier est de

$$\boxed{f(4{,}6) = -0{,}3 \times 4{,}6^2 + 1{,}6 \times 4{,}6 + 2 \simeq 3{,}01\text{ m}}$$

38 CALCULATRICE

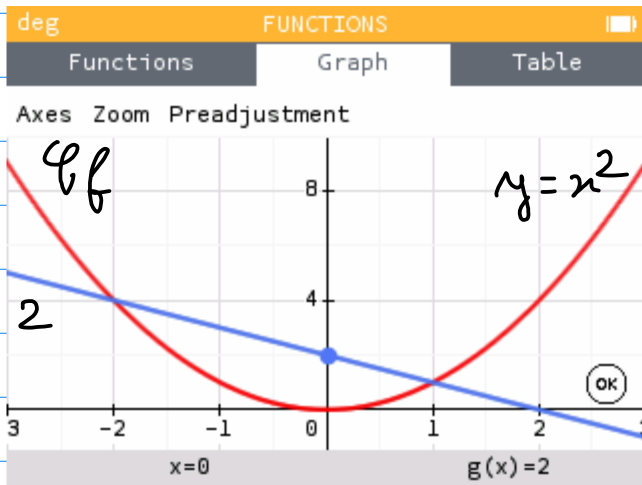
Dans un repère, soient $\mathcal{P}$ la parabole représentant la fonction carré (notée f) et $\mathcal{D}$ la droite représentant la fonction affine g définie par $g(x) = -x + 2$.

1. Représenter les deux courbes sur la calculatrice et conjecturer leur position relative.
2. Étudier le signe du polynôme $f(x) - g(x)$ puis valider ou infirmer les conjectures de la question 1.

1)

$\mathcal{C}_g$

$y = -x + 2$



Graphiquement, on peut conjecturer que :

- $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se croisent aux points d'abscisses -2 et 1
- $\mathcal{C}_f$ au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$
- $\mathcal{C}_f$ en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]-2 ; 1[$.

2) Pour tout réel x, on a :

$f(x) - g(x) = x^2 - (-x+2) = x^2 + x - 2$

On étudie le signe de ce trinôme :

$a = 1 \quad b = 1 \quad c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$

$\Delta > 0$ donc $x^2 + x - 2$ a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

et $$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

On peut dresser le tableau de signes du trinôme :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
signe de x^2+x-2		$+$ signe de a	0	$-$ signe de $-a$	0	$+$ signe de a	

On déduit du tableau de signes que :

- si $x \in]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$ alors

  $f(x) - g(x) > 0$

  et donc $\mathcal{C}_f$ au-dessus de $\mathcal{C}_g$

- si $x \in]-2;1[$ alors $f(x) - g(x) < 0$

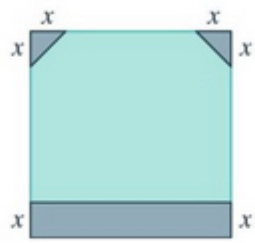
  et donc $\mathcal{C}_f$ en-dessous de $\mathcal{C}_g$.

- si $x \in \{-2;1\}$ alors $f(x) = g(x)$

  et $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se croisent

40 **Chercher, raisonner**

Un verrier souhaite tailler une vitre. Il utilise un carré de verre de 3 mètres de côté. Dans le carré, il découpe un rectangle de largeur x et deux triangles rectangles isocèles comme sur la figure ci-contre.



Il souhaite que la vitre obtenue ait une aire supérieure à 5 m^2.

- Comment doit-il choisir les dimensions de sa découpe ?

• L'aire du carré de verre est égale à 3^2

• L'aire de la partie découpée est égale à :

$$2 \times \frac{x^2}{2} + 3 \times x = x^2 + 3x$$

• L'aire de la vitre est donc égale à :

$$9 - (x^2 + 3x) = -x^2 - 3x + 9$$

• Pour répondre aux contraintes, x doit être solution de l'inéquation :

$$-x^2 - 3x + 9 > 5$$

$$\iff 0 > x^2 + 3x - 4$$

• 1 est racine évidente de $x^2 + 3x - 4$ car $1^2 + 3 \times 1 - 4 = 0$

• Le produit des racines est égal à $\frac{c}{a} = \frac{-4}{1} = -4$

la seconde racine x_2 de x^2+3x-4 vérifie donc $1\times x_2=-4 \iff x_2=-4$

Les racines de x^2+3x-4 sont donc -4 et 1, on en déduit le tableau de signes du trinôme sur l'intervalle $[0;\frac{3}{2}]$. En effet x doit vérifier la contrainte $0\leq 2x\leq 3 \iff 0\leq x\leq \frac{3}{2}$

x	0		1		$3/2$
x^2+3x-4		$-$	0	$+$	
		signe de $-a$		signe de a	

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation

$$-x^2-3x+9>5 \iff x^2+3x-4<0$$

est $[0;1[$.

Le vendeur doit donc prendre une valeur de x inférieure à 1

45 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $\dfrac{x}{2x^2+3} < -1$

2. $\dfrac{3x}{x+1} \geqslant 5x$

3. $\dfrac{1}{4x} + \dfrac{2}{3-x} > 3$

1) $\dfrac{x}{2x^2+3} < -1 \iff \dfrac{x+2x^2+3}{2x^2+3} < 0$

Pour tout réel x on a $2x^2+3>0$, donc :

$\dfrac{x}{2x^2+3} < -1 \iff x+2x^2+3 > 0$

$a=2 \quad b=1 \quad c=3$

On étudie le signe du trinôme

$\Delta = b^2-4ac = 1-4\times2\times3 = -23$

$\Delta<0$ donc $2x^2+x+3$ est du signe de $a=2>0$ pour tout réel x.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $S=\mathbb{R}$

2) On résout dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$(I_2)\quad \dfrac{3x}{x+1} \geqslant 5x$

On transforme l'inéquation :

$$\frac{3x}{x+1} \geq 5x \iff \frac{3x-5x(x+1)}{x+1} \geq 0$$

$$\iff \frac{-5x^2-2x}{x+1} \geq 0$$

$$\iff \frac{x(-5-2x)}{x+1} \geq 0$$

On dresse le tableau de signes du quotient $\frac{x(-5-2x)}{x+1}$:

Racines du trinôme $x(-5-2x)$:

0 et $-\frac{5}{2}$

Racine de $x+1$: -1 (valeur interdite)

x	$-\infty$		$-5/2$		-1		0		$+\infty$
$x(-5-2x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x(-5-2x)}{x+1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(I_2) \iff \frac{x(-5-2x)}{x+1} \geq 0$ est donc

$$S =]-\infty ; -\tfrac{5}{2}] \cup]-1 ; 0]$$

3) On résout dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\frac{1}{4x}+\frac{2}{3-x}>3 \qquad (I_3)$$

On transforme l'inéquation (I_3) :

$$(I_3) \iff \frac{3-x+2\times 4x}{4x(3-x)}-\frac{3\times 4x\times(3-x)}{4x(3-x)}\geqslant 0$$

$$(I_3) \iff \frac{3+7x}{4x(3-x)}-\frac{36x-12x^2}{4x(3-x)}\geqslant 0$$

$$(I_3) \iff \frac{12x^2-29x+3}{4x(3-x)}\geqslant 0$$

On détermine les racines du $12x^2-29x+3$

$a=12 \quad b=-29 \quad c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(-29)^2-4\times 12\times 3$

$\Delta=697$

$\Delta>0$ donc $12x^2-29x+3$ a deux racines distinctes :

$x_1=-\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{29-\sqrt{697}}{24}$ et $x_2=\frac{29+\sqrt{697}}{24}$

x	$-\infty$		$\frac{29-\sqrt{697}}{4}$		0		$\frac{29+\sqrt{697}}{24}$		3		$+\infty$
$12x^2-29x+3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x(3-x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation

$$(I_3) \iff \frac{12x^2-29x+3}{4x(3-x)} \geq 0$$

est $S = \left[\frac{26-\sqrt{697}}{4} ; 0\right[\cup \left[\frac{29+\sqrt{697}}{24} ; 3\right[$

46 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $(x-1)(x^2-5x+6) > 0$
2. $\dfrac{-x^2+5x-7}{2x+5} \leqslant 0$
3. $x^3 - x^2 + 4x \geqslant 0$

1) On résout dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$(x-1)(x^2-5x+6) > 0$$

• Racine de $x-1$: $x-1=0 \iff x=1$

• Racines de x^2-5x+6 :

-1 est racine évidente

Soit x_2 l'autre racine,

on a $x_2 \times (-1) = \dfrac{c}{a} = 6 \iff x_2 = -6$

On peut dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		-6		-1		$+1$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)(x^2-5x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de $(x-1)(x^2-5x+6) > 0$ est $]-6;-1[\cup]1;+\infty[$

2) On résout dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{-x^2+5x-7}{2x+5} \leq 0$$

. Racines de $-x^2+5x-7$:

$\Delta = b^2-4ac = 5^2 - 4\times(-1)\times(-7) = -3$

. $\Delta < 0$ donc pas de racines

. Racine de $2x+5$:

$2x+5=0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$

x	$-\infty$		$-5/2$		$+\infty$
$-x^2+5x-7$		$-$ signe de a		$-$	
$2x+5$		$-$	0	$+$	
$\frac{-x^2+5x-7}{2x+5}$		$+$	$\Vert$	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{-x^2+5x-7}{2x+5} \leq 0$ est donc :

$\left]-\frac{5}{2};+\infty\right[$