Exemples du cours Variables alÃl'atoires 2019/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

6 juin 2020

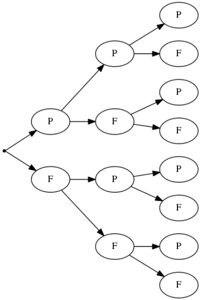
Table des matières

On lance trois fois de suite une pièce équilibrée et l'on note après chaque lancer si le côté sorti est pile (noté P) ou face (noté F) .

Activité 2, partie 1

On lance trois fois de suite une pièce équilibrée et l'on note après chaque lancer si le côté sorti est pile (noté P) ou face (noté F) .

- Représentation à l'aide d'un arbre de l'ensemble des issues possibles de cette expérience aléatoire. Toutes les branches ont une probabilité de $\frac{1}{2}$



On lance trois fois de suite une pièce équilibrée et l'on note après chaque lancer si le côté sorti est pile (noté P) ou face (noté F) .

Activité 2, partie 2

On lance trois fois de suite une pièce équilibrée et l'on note après chaque lancer si le côté sorti est pile (noté P) ou face (noté F) .

- L'univers Ω de cette expérience aléatoire compte $2^3 = 8$ issues équiprobables.

Activité 2, partie 2

On lance trois fois de suite une pièce équilibrée et l'on note après chaque lancer si le côté sorti est pile (noté P) ou face (noté F) .

- L'univers Ω de cette expérience aléatoire compte $2^3 = 8$ issues équiprobables.
- Soit l'événement A = « Obtenir exactement un Pile ». Cet événement est réalisé par 3 issues donc $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}$.

Activité 2, partie 2

On lance trois fois de suite une pièce équilibrée et l'on note après chaque lancer si le côté sorti est pile (noté P) ou face (noté F) .

- L'univers Ω de cette expérience aléatoire compte $2^3 = 8$ issues équiprobables.
- Soit l'événement A = « Obtenir exactement un Pile ». Cet événement est réalisé par 3 issues donc $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}$.
- Soit l'événement B = « Obtenir au moins un Pile ». Cet événement a pour contraire $\overline{B}$ = « N'obtenir aucun Pile » dont la probabilité est $\mathbb{P}(\overline{B}) = \frac{1}{8}$. On en déduit que $\mathbb{P}(B) = \frac{7}{8}$.

On définit à partir de cette expérience aléatoire un jeu qui consiste à gagner 1 € pour chaque face sorti et à perdre 1,1 € pour chaque pile sorti.
La fonction G de Ω dans $\mathbb{R}$ associe à une issue de l'expérience aléatoire le gain du joueur.

On définit à partir de cette expérience aléatoire un jeu qui consiste à gagner 1 € pour chaque face sorti et à perdre 1,1 € pour chaque pile sorti.
La fonction G de Ω dans $\mathbb{R}$ associe à une issue de l'expérience aléatoire le gain du joueur.

- La variable aléatoire G prend quatre valeurs distinctes : $1+1+1=3$, $1+1-1,1=0,9$, $1-1,1-1,1=-1,2$ et $-1,1-1,1-1,1=-3,3$.

On définit à partir de cette expérience aléatoire un jeu qui consiste à gagner 1 € pour chaque face sorti et à perdre 1,1 € pour chaque pile sorti.
La fonction G de Ω dans $\mathbb{R}$ associe à une issue de l'expérience aléatoire le gain du joueur.

- La variable aléatoire G prend quatre valeurs distinctes : $1+1+1=3$, $1+1-1,1=0,9$, $1-1,1-1,1=-1,2$ et $-1,1-1,1-1,1=-3,3$.
- Loi de la variable aléatoire G :

Activité 2 : déterminer une ligne de niveau, partie 3

On définit à partir de cette expérience aléatoire un jeu qui consiste à gagner 1 € pour chaque face sorti et à perdre 1,1 € pour chaque pile sorti.
La fonction G de Ω dans $\mathbb{R}$ associe à une issue de l'expérience aléatoire le gain du joueur.

- La variable aléatoire G prend quatre valeurs distinctes : $1+1+1=3$, $1+1-1,1=0,9$, $1-1,1-1,1=-1,2$ et $-1,1-1,1-1,1=-3,3$.
- Loi de la variable aléatoire G :
  - $\mathbb{P}(G=3)=\frac{1}{8}$ et $\mathbb{P}(G=0,9)=\frac{3}{8}$

Activité 2 : déterminer une ligne de niveau, partie 3

On définit à partir de cette expérience aléatoire un jeu qui consiste à gagner 1 € pour chaque face sorti et à perdre 1,1 € pour chaque pile sorti.
La fonction G de Ω dans $\mathbb{R}$ associe à une issue de l'expérience aléatoire le gain du joueur.

- La variable aléatoire G prend quatre valeurs distinctes : $1+1+1=3$, $1+1-1,1=0,9$, $1-1,1-1,1=-1,2$ et $-1,1-1,1-1,1=-3,3$.
- Loi de la variable aléatoire G :
  - $\mathbb{P}(G=3)=\frac{1}{8}$ et $\mathbb{P}(G=0,9)=\frac{3}{8}$
  - $\mathbb{P}(G=-1,2)=\frac{3}{8}$ et $\mathbb{P}(G=-3,3)=\frac{1}{8}$

Capacité 1, partie 1

On lance deux fois de suite un dé tétraédrique équilibré dont les quatre faces sont numérotées 1, 2, 3 et 4. Lors de chaque lancer, on note le nombre porté par la face du dessous et on fait la somme des deux nombres obtenus successivement.
La probabilité d'obtenir une somme paire est-elle égale à $\frac{1}{2}$?

Capacité 1, partie 1

On lance deux fois de suite un dé tétraédrique équilibré dont les quatre faces sont numérotées 1, 2, 3 et 4. Lors de chaque lancer, on note le nombre porté par la face du dessous et on fait la somme des deux nombres obtenus successivement.
La probabilité d'obtenir une somme paire est-elle égale à $\frac{1}{2}$?

- L'univers de cette expérience aléatoire est constitué de $4^2 = 16$ issues équiprobables de la forme (face dé 1, face dé 2).

On lance deux fois de suite un dé tétraédrique équilibré dont les quatre faces sont numérotées 1, 2, 3 et 4. Lors de chaque lancer, on note le nombre porté par la face du dessous et on fait la somme des deux nombres obtenus successivement.
La probabilité d'obtenir une somme paire est-elle égale à $\frac{1}{2}$?

- L'univers de cette expérience aléatoire est constitué de $4^2 = 16$ issues équiprobables de la forme (face dé 1, face dé 2).
- L'événement A = « la somme est paire » est constitué de $2 \times 2 = 4$ couples de faces paires et $2 \times 2 = 4$ couples de faces impaires. La probabilité de A est donc $\mathbb{P}(A) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

On lance deux fois de suite un dé équilibré à n faces dont les faces sont numérotées 1, 2, ... n. Lors de chaque lancer, on note le nombre porté par la face du dessous et on fait la somme des deux nombres obtenus successivement.

Capacité 1, partie 2

On lance deux fois de suite un dé équilibré à n faces dont les faces sont numérotées 1, 2, ... n. Lors de chaque lancer, on note le nombre porté par la face du dessous et on fait la somme des deux nombres obtenus successivement.

- L'univers de cette expérience aléatoire est constitué de n^2 issues équiprobables de la forme (face dé 1, face dé 2).

Capacité 1, partie 3

On lance deux fois de suite un dé équilibré à n faces dont les faces sont numérotées 1, 2, $\ldots n$. Lors de chaque lancer, on note le nombre porté par la face du dessous et on fait la somme des deux nombres obtenus successivement. Soit l'événement A = « La somme est paire ». Une somme est paire si et seulement si les deux faces sont paires.

On distingue deux cas :

Capacité 1, partie 3

On lance deux fois de suite un dé équilibré à n faces dont les faces sont numérotées 1, 2, ... n. Lors de chaque lancer, on note le nombre porté par la face du dessous et on fait la somme des deux nombres obtenus successivement. Soit l'événement A = « La somme est paire ». Une somme est paire si et seulement si les deux faces sont paires.
On distingue deux cas :

- Premier cas : n est pair : On a $n/2$ entiers pairs et $n/2$ entiers impairs donc A est réalisé par $2 \times (n/2)^2 = n^2/2$ issues et sa probabilité est $\mathbb{P}(A) = \frac{n^2/2}{n^2} = \frac{1}{2}$.

On lance deux fois de suite un dé équilibré à n faces dont les faces sont numérotées 1, 2, ... n. Lors de chaque lancer, on note le nombre porté par la face du dessous et on fait la somme des deux nombres obtenus successivement. Soit l'événement A = « La somme est paire ». Une somme est paire si et seulement si les deux faces sont paires.
On distingue deux cas :

- Premier cas : n est pair : On a $n/2$ entiers pairs et $n/2$ entiers impairs donc A est réalisé par $2\times(n/2)^2 = n^2/2$ issues et sa probabilité est $\mathbb{P}(A) = \frac{n^2/2}{n^2} = \frac{1}{2}$.
- Second cas : n est impair : On a $(n-1)/2$ entiers pairs et $(n+1)/2$ entiers impairs donc A est réalisé par $((n-1)/2)^2 + ((n+1)/2)^2 = (n^2+1)/2$ issues. La probabilité de A est donc $\mathbb{P}(A) = \frac{(n^2+1)/2}{n^2} > \frac{1}{2}$.

On considère de nouveau l'expérience aléatoire constituée de deux lancers successifs d'un dé tétraédrique équilibré et on note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme des nombres portés par les faces du dessous lors de chaque lancer.
La loi de probabilité de X est donc :

k	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}(X = k)$	$1/16$	$2/16$	$3/16$	$4/16$	$3/16$	$2/16$	$1/16$

Capacité 2, partie 2

- $\mathbb{P}\left(X = 3\right) = 3/16$

Capacité 2, partie 2

- $\mathbb{P}(X = 3) = 3/16$
- $\mathbb{P}(X \leqslant 3) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = 1/16 + 2/16 = 3/16$

Capacité 2, partie 2

- $\mathbb{P}(X = 3) = 3/16$
- $\mathbb{P}(X \leqslant 3) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = 1/16 + 2/16 = 3/16$
- $\mathbb{P}(X > 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 2) = 1 - 3/16 = 13/16$

Capacité 2, partie 2

- $\mathbb{P}(X = 3) = 3/16$
- $\mathbb{P}(X \leqslant 3) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = 1/16 + 2/16 = 3/16$
- $\mathbb{P}(X > 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 2) = 1 - 3/16 = 13/16$
- $\mathbb{P}(X \geqslant 3) = \mathbb{P}(X > 3) + \mathbb{P}(X = 3) = 13/16 + 2/16 = 15/16.$

Une urne contient une boule rouge notée R, deux boules vertes notées V_1 et V_2 et deux boules bleues notées B_1 et B_2. On tire au hasard une boule dans l'urne. Si on tire la boule rouge on gagne 20 euros, si on tire une boule verte on gagne 2 euros et si on tire une boule bleue on perd 15 euros.
On note X le gain algébrique du joueur.

Capacité 3, partie 1

Une urne contient une boule rouge notée R, deux boules vertes notées V_1 et V_2 et deux boules bleues notées B_1 et B_2. On tire au hasard une boule dans l'urne. Si on tire la boule rouge on gagne 20 euros, si on tire une boule verte on gagne 2 euros et si on tire une boule bleue on perd 15 euros.
On note X le gain algébrique du joueur.

- Loi de probabilité de la variable aléatoire X :

k	20	2	-15
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

Une urne contient une boule rouge notée R, deux boules vertes notées V_1 et V_2 et deux boules bleues notées B_1 et B_2. On tire au hasard une boule dans l'urne. Si on tire la boule rouge on gagne 20 euros, si on tire une boule verte on gagne 2 euros et si on tire une boule bleue on perd 15 euros.
On note X le gain algébrique du joueur.

- Loi de probabilité de la variable aléatoire X :

k	20	2	-15
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

- $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = \mathbb{P}(X=20) + \mathbb{P}(X=2) = \frac{3}{5}$

Une urne contient une boule rouge notée R, deux boules vertes notées V_1 et V_2 et deux boules bleues notées B_1 et B_2. On tire au hasard une boule dans l'urne. Si on tire la boule rouge on gagne 20 euros, si on tire une boule verte on gagne 2 euros et si on tire une boule bleue on perd 15 euros.
On note X le gain algébrique du joueur.

- Loi de probabilité de la variable aléatoire X :

k	20	2	-15
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

- $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = \mathbb{P}(X=20) + \mathbb{P}(X=2) = \frac{3}{5}$
- On peut conjecturer que le gain moyen sur un grand nombre de parties va tendre presque sûrement vers $20 \times \mathbb{P}(X=20) + 2 \times \mathbb{P}(X=2) - 15 \times \mathbb{P}(X=-15) = \frac{24}{5} - \frac{30}{5} = -\frac{6}{5}$.

Capacité 3, partie 2

Une urne contient une boule rouge notée R, deux boules vertes notées V_1 et V_2 et deux boules bleues notées B_1 et B_2. On tire au hasard une boule dans l'urne. Si on tire la boule rouge on gagne 20 euros, si on tire une boule verte on gagne 2 euros et si on tire une boule bleue on perd 15 euros.
On note X le gain algébrique du joueur.

Une urne contient une boule rouge notée R, deux boules vertes notées V_1 et V_2 et deux boules bleues notées B_1 et B_2. On tire au hasard une boule dans l'urne. Si on tire la boule rouge on gagne 20 euros, si on tire une boule verte on gagne 2 euros et si on tire une boule bleue on perd 15 euros.
On note X le gain algébrique du joueur.

- Loi de probabilité de la variable aléatoire X :

k	20	2	-15
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

Une urne contient une boule rouge notée R, deux boules vertes notées V_1 et V_2 et deux boules bleues notées B_1 et B_2. On tire au hasard une boule dans l'urne. Si on tire la boule rouge on gagne 20 euros, si on tire une boule verte on gagne 2 euros et si on tire une boule bleue on perd 15 euros.
On note X le gain algébrique du joueur.

- Loi de probabilité de la variable aléatoire X :

k	20	2	-15
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

- On peut conjecturer que le gain moyen sur un grand nombre de parties va tendre presque sûrement vers $20 \times \mathbb{P}(X = 20) + 2 \times \mathbb{P}(X = 2) - 15 \times \mathbb{P}(X = -15) = \frac{24}{5} - \frac{30}{5} = -\frac{6}{5}$ et donc que sur un grand nombre de parties le gain moyen d'un joueur est presque sûrement négatif.

Compléter la fonction `Python` ci-dessous pour que `somme_n_des(ndes, nfaces)` retourne la somme des résultats obtenus lors de `ndes` lancers d'un dé équilibré à `nfaces`.

Compléter la fonction Python ci-dessous pour que `somme_n_des(ndes, nfaces)` retourne la somme des résultats obtenus lors de `ndes` lancers d'un dé équilibré à `nfaces`.

```
from random import randint

def somme_n_des(ndes, nfaces):
    s = 0
    for k in range(nfaces):
        s = s + randint(1, ndes)
    return s
```

Compléter la fonction `Python` ci-dessous pour que `gain_urne()` retourne le gain algébrique du jeu décrit dans la capacité 3.

Compléter la fonction Python ci-dessous pour que `gain_urne()` retourne le gain algébrique du jeu décrit dans la capacité 3.

```
from random import random

def gain_urne():
    tirage = random()
    if tirage < 0.2:
        return 20
    elif tirage < 0.6:
        return 2
    else:
        return -15
```

Un élève a complété la fonction et obtient l'affichage `[59936, 20206, 19858]` lorsqu'il exécute le code ci-dessous. Qu'en pensez-vous ?

```
echantillon = [gain_urne() for k in range
     (100000)]
distribution = [echantillon.count(val) for
     val in [-15, 2, 20]]
print(distribution)
```

Un élève a complété la fonction et obtient l'affichage [59936, 20206, 19858] lorsqu'il exécute le code ci-dessous. Qu'en pensez-vous ?

```
echantillon = [gain_urne() for k in range
     (100000)]
distribution = [echantillon.count(val) for
     val in [-15, 2, 20]]
print(distribution)
```

- La distribution de fréquences obtenue par l'élève sur son échantillon est :

gain	-15	2	20
fréquence	0,59936	0,20206	0195858

Un élève a complété la fonction et obtient l'affichage [59936, 20206, 19858] lorsqu'il exécute le code ci-dessous. Qu'en pensez-vous ?

```
echantillon = [gain_urne() for k in range
     (100000)]
distribution = [echantillon.count(val) for
     val in [-15, 2, 20]]
print(distribution)
```

- La distribution de fréquences obtenue par l'élève sur son échantillon est :

gain	-15	2	20
fréquence	0,59936	0,20206	0195858

- Cette distribution est très éloignée de la loi de probabilité de la variable aléatoire gain :

gain	-15	2	20
fréquence	0,4	0,4	0,2

- La distribution de fréquences obtenue par l'élève sur son échantillon est :

gain	-15	2	20
fréquence	0,59936	0,20206	0195858

- La distribution de fréquences obtenue par l'élève sur son échantillon est :

gain	-15	2	20
fréquence	0,59936	0,20206	0195858

- Cette distribution est très éloignée de la loi de probabilité de la variable aléatoire gain :

gain	-15	2	20
fréquence	0,4	0,4	0,2

L'élève a du commettre une erreur. a probabilité de rejeter à tort l'hypothèse que son code est correct est de $0,05/2 = 0,025$. En effet, sur un échantillon de taille $n = 100000$, fréquence de la valeur -15 a une probabilité supérieure à $0,95$ de se trouver dans l'intervalle de fluctuation $\left[0,4 - \frac{1}{\sqrt{100000}}\,;\,0,4 - + \frac{1}{\sqrt{100000}}\right] = [0,39\,;\,0,41]$.

Capacité 4, partie 1

On considère la variable aléatoire Y dont la loi est donnée ci-dessous :

k	-5	1	2	10
$\mathbb{P}(Y=k)$	0,35	0,5	...	0,1

Capacité 4, partie 1

On considère la variable aléatoire Y dont la loi est donnée ci-dessous :

k	-5	1	2	10
$\mathbb{P}(Y=k)$	0,35	0,5	...	0,1

- On a $\mathbb{P}(Y=-5)+\mathbb{P}(Y=1)+\mathbb{P}(Y=2)+\mathbb{P}(Y=10)=1$. On en déduit que $\mathbb{P}(Y=2)=1-0,35-0,5-0,1=0,05$.

Capacité 4, partie 1

On considère la variable aléatoire Y dont la loi est donnée ci-dessous :

k	-5	1	2	10
$\mathbb{P}(Y = k)$	0,35	0,5	...	0,1

- On a $\mathbb{P}(Y=-5)+\mathbb{P}(Y=1)+\mathbb{P}(Y=2)+\mathbb{P}(Y=10)=1$.
  On en déduit que $\mathbb{P}(Y=2)=1-0,35-0,5-0,1=0,05$.
- Espérance de Y :
  $\mathbb{E}(Y)=-5\times 0,35+1\times 0,5+2\times 0,05+10\times 0,1=-0,15$.

On considère la variable aléatoire Y dont la loi est donnée ci-dessous :

k	-5	1	2	10
$\mathbb{P}(Y = k)$	0,35	0,5	...	0,1

- On a $\mathbb{P}(Y=-5)+\mathbb{P}(Y=1)+\mathbb{P}(Y=2)+\mathbb{P}(Y=10)=1$. On en déduit que $\mathbb{P}(Y=2)=1-0,35-0,5-0,1=0,05$.
- Espérance de Y : $\mathbb{E}(Y)=-5\times 0,35+1\times 0,5+2\times 0,05+10\times 0,1=-0,15$.
- Variance de Y : $\mathbb{V}(Y)=0,35\times(-5-(-0,15))^2+0,5\times(1-(-0,15))^2+0,05\times(2-(-0,15))^2+0,1\times(10-(-0,15))^2+2\times 0,05+10\times 0,1=-0,15=19,4275$.

On considère la variable aléatoire Y dont la loi est donnée ci-dessous :

k	-5	1	2	10
$\mathbb{P}(Y=k)$	0,35	0,5	...	0,1

- On a $\mathbb{P}(Y=-5)+\mathbb{P}(Y=1)+\mathbb{P}(Y=2)+\mathbb{P}(Y=10)=1$.
  On en déduit que $\mathbb{P}(Y=2)=1-0,35-0,5-0,1=0,05$.
- Espérance de Y :
  $\mathbb{E}(Y)=-5\times 0,35+1\times 0,5+2\times 0,05+10\times 0,1=-0,15$.
- Variance de Y :
  $\mathbb{V}(Y)=0,35\times(-5-(-0,15))^2+0,5\times(1-(-0,15))^2+0,05\times(2-(-0,15))^2+0,1\times(10-(-0,15))^2+2\times 0,05+10\times 0,1=-0,15=19,4275$.
- Écart-type de Y : $\sigma(Y)=\sqrt{\mathbb{V}(Y)}\approx 4,41$.

On rappelle la loi de la variable aléatoire G définie dans l'activité 2 :

k	$-3,3$	$-1,2$	$0,9$	3
$\mathbb{P}(G=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Capacité 4, partie 2

On rappelle la loi de la variable aléatoire G définie dans l'activité 2 :

k	$-3,3$	$-1,2$	$0,9$	3
$\mathbb{P}(G=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

- L'espérance de la variable aléatoire G est donc :

$$\mathrm{E}(G) = 3 \times \frac{1}{8} + 0,9 \times \frac{3}{8} - 1,2 \times \frac{3}{8} - 3,3 \times \frac{1}{8} = -0,15$$

Capacité 4, partie 2

On rappelle la loi de la variable aléatoire G définie dans l'activité 2 :

k	$-3,3$	$-1,2$	$0,9$	3
$\mathbb{P}(G=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

- L'espérance de la variable aléatoire G est donc :

$$\mathrm{E}(G) = 3\times\frac{1}{8}+0,9\times\frac{3}{8}-1,2\times\frac{3}{8}-3,3\times\frac{1}{8} = -0,15$$

- En moyenne ce jeu est donc défavorable au joueur avec une perte moyenne de $-0,15$ € par partie sur un grand nombre de parties jouées.
  Par exemple, sur 10000 parties, l'organisateur du jeu peut espérer un gain total de $0,15\times 10000 = 1500$ €.

Capacité 4, partie 3

On lance un dé à 6 faces équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X le nombre porté par la face du dessus.

On lance un dé à 6 faces équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X le nombre porté par la face du dessus.

- L'espérance de la variable aléatoire X est égale à :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{1}{6} \times \frac{6(6+1)}{2} = \frac{7}{2}$$

Capacité 4, partie 3

On lance un dé à 6 faces équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X le nombre porté par la face du dessus.

- L'espérance de la variable aléatoire X est égale à :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{1}{6} \times \frac{6(6+1)}{2} = \frac{7}{2}$$

- La variance de la variable aléatoire X est égale à :

$$\mathrm{V}(X) = \frac{1}{6}\Big((1-3,5)^2 + (2-3,5)^2 + (3-3,5)^2 + (4-3,5)^2 + (5-3,5)^2 +$$

Capacité 4, partie 3

On lance un dé à 6 faces équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X le nombre porté par la face du dessus.

- L'espérance de la variable aléatoire X est égale à :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{1}{6} \times \frac{6(6+1)}{2} = \frac{7}{2}$$

- La variance de la variable aléatoire X est égale à :

$$\mathrm{V}(X) = \frac{1}{6}\Big((1-3,5)^2 + (2-3,5)^2 + (3-3,5)^2 + (4-3,5)^2 + (5-3,5)^2 +$$

- L'écart-type de la variable aléatoire X est égale à :

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{35}{3}} \approx 1,71$$

On lance un dé à n faces équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à n et on note X le nombre porté par la face du dessus.

On lance un dé à n faces équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à n et on note X le nombre porté par la face du dessus.

- L'espérance de la variable aléatoire X est égale à :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{n}(1+2+3+\cdots+n) = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Résumons dans un tableau la somme reçue par le joueur pour chacune des $4^2 = 16$ issues équiprobables de cette expérience aléatoire.

Boule 1 / Boule 2	1	2	3	4
1	0	1,5	2×2	1,5
2	$1\times$ 1,5	0	1,5	2×2
3	2×2	$1\times$ 1,5	0	1,5
4	1,5	2×2	$1\times$ 1,5	0

Capacité 5, partie 1

Résumons dans un tableau la somme reçue par le joueur pour chacune des $4^2 = 16$ issues équiprobables de cette expérience aléatoire.

Résumons dans un tableau la somme reçue par le joueur pour chacune des $4^2 = 16$ issues équiprobables de cette expérience aléatoire.

-

Boule 1 / Boule 2	1	2	3	4
1	0	1,5	3 × 2	1,5
2	1,5	0	1,5	3 × 2
3	3 × 2	1,5	0	1,5
4	1,5	3 × 2	1,5	0

Résumons dans un tableau la somme reçue par le joueur pour chacune des $4^2 = 16$ issues équiprobables de cette expérience aléatoire.

-

Boule 1 / Boule 2	1	2	3	4
1	0	1,5	3 × 2	1,5
2	1,5	0	1,5	3 × 2
3	3 × 2	1,5	0	1,5
4	1,5	3 × 2	1,5	0

- La variable aléatoire G représentant le gain algébrique du joueur (recette − mise) peut donc prendre pour valeurs : $0-21,5=-2,5$, $1,5-2,5=-1$ et $6-2,5=3,5$.

Capacité 5, partie 2

Boule 1 / Boule 2	1	2	3	4
1	0	1,5	3×2	1,5
2	1,5	0	1,5	3×2
3	3×2	1,5	0	1,5
4	1,5	3×2	1,5	0

Capacité 5, partie 2

Boule 1 / Boule 2	1	2	3	4
1	0	1,5	3 × 2	1,5
2	1,5	0	1,5	3 × 2
3	3 × 2	1,5	0	1,5
4	1,5	3 × 2	1,5	0

- Loi de probabilité de G :

k	-2,5	-1	3,5
$\mathbb{P}\left(G=k\right)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Capacité 5, partie 3

- Loi de probabilité de G :

k	-2,5	-1	3,5
$\mathbb{P}(G = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

- Loi de probabilité de G :

k	-2,5	-1	3,5
$\mathbb{P}(G=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

- Espérance de G :

$$\mathbb{E}(G) = -2,5 \times \frac{1}{4} + (-1) \times \frac{1}{2} + 3,5 \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

- Loi de probabilité de G :

k	-2,5	-1	3,5
$\mathbb{P}(G=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

- Espérance de G :

$$\mathbb{E}(G) = -2,5 \times \frac{1}{4} + (-1) \times \frac{1}{2} + 3,5 \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

- $\mathbb{E}(G) < 0$ donc ce jeu est défavorable au joueur.

- Loi de probabilité de G :

k	-2,5	-1	3,5
$\mathbb{P}(G=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

- Espérance de G :

$$\mathbb{E}(G) = -2,5 \times \frac{1}{4} + (-1) \times \frac{1}{2} + 3,5 \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

- $\mathbb{E}(G) < 0$ donc ce jeu est défavorable au joueur.
- En moyenne le joueur perd $0,25$ € par partie et l'organisateur en gagne autant, donc sur un échantillon de 4000 parties, l'organisateur peut espérer un gain de $4000 \times 0,25 = 1000$ €.

Capacité 6, partie 1

- Soit B la variable aléatoire bénéfice, R la variable aléatoire recette et C la variable aléatoire coût. On a $B = R - C$. De plus on a $R = 45X$.

- Soit B la variable aléatoire bénéfice, R la variable aléatoire recette et C la variable aléatoire coût. On a $B = R - C$. De plus on a $R = 45X$.
- Par linéarité de l'espérance, on a :

  $$\mathbb{E}(B) = \mathbb{E}(R) - \mathbb{E}(C) = \mathbb{E}(45X) - 100000 = 45\mathbb{E}(X) - 100000 = 45 \times 1200$$

  L'organisateur du festival peut espérer une recette de 440000 €.

- Soit B la variable aléatoire bénéfice, R la variable aléatoire recette et C la variable aléatoire coût. On a $B = R - C$. De plus on a $R = 45X$.
- Par linéarité de l'espérance, on a :

  $$\mathbb{E}(B) = \mathbb{E}(R) - \mathbb{E}(C) = \mathbb{E}(45X) - 100000 = 45\mathbb{E}(X) - 100000 = 45 \times 1200$$

  L'organisateur du festival peut espérer une recette de 440000 €.
- Par propriété de l'écart-type, on déduit de $B = 45X - C$ que :

  $$\sigma(B) = 45\sigma(X) = 45\sqrt{1500} \approx 1743 \text{ €}$$

On considère que pour la session 2020 d'un concours, la note X sur 10 attribuée à un candidat pris au hasard, aura pour espérance $\mathbb{E}(X) = 5{,}4$ et pour écart-type $\sigma(X) = 2$
Le responsable du concours veut obtenir une moyenne de 5 avec un écart-type de 1,5. Ainsi, il veut appliquer une transformation affine à X en lui associant $aX + b$ avec a et b des réels et $a > 0$.

On considère que pour la session 2020 d'un concours, la note X sur 10 attribuée à un candidat pris au hasard, aura pour espérance $\mathbb{E}(X) = 5,4$ et pour écart-type $\sigma(X) = 2$
Le responsable du concours veut obtenir une moyenne de 5 avec un écart-type de 1,5. Ainsi, il veut appliquer une transformation affine à X en lui associant $aX + b$ avec a et b des réels et $a > 0$.

- Par propriété de l'espérance et de l'écart-type, a et b doivent être solutions du système :

$$\mathscr{S} \Leftrightarrow \begin{cases} a\mathbb{E}(X) + b = 5 \\ \left|a\right|\sigma(X) = 1,5 \end{cases}$$

On considère que pour la session 2020 d'un concours, la note X sur 10 attribuée à un candidat pris au hasard, aura pour espérance $\mathbb{E}(X) = 5,4$ et pour écart-type $\sigma(X) = 2$
Le responsable du concours veut obtenir une moyenne de 5 avec un écart-type de 1,5. Ainsi, il veut appliquer une transformation affine à X en lui associant $aX + b$ avec a et b des réels et $a > 0$.

- Par propriété de l'espérance et de l'écart-type, a et b doivent être solutions du système :

$$\mathscr{S} \Leftrightarrow \begin{cases} a\mathbb{E}(X) + b = 5 \\ |a|\sigma(X) = 1,5 \end{cases}$$

- On résout le système en remplaçant $|a|$ par a car $a > 0$:

$$\mathscr{S} \Leftrightarrow \begin{cases} 5,4a + b = 5 \\ a = \frac{1,5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 - 0,75 \times 5,4 = 0,95 \\ a = 0,75 \end{cases}$$

Compléter les fonctions ci-dessous pour qu'elles retournent respectivement l'espérance d'une variable aléatoire réelle définie sur un univers fini.

```python
from math import sqrt

def esperance(valeur, proba):
    e = 0
    n = len(valeur)
    for k in range(n):
        e = e + valeur[k] * proba[k]
    return e
```

Compléter les fonctions ci-dessous pour qu'elles retournent respectivement la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire réelle définie sur un univers fini.

```
from math import sqrt

def variance(valeur, proba):
    e = esperance(valeur, proba)
    v = 0
    n = len(valeur)
    for k in range(n):
        v = v + (valeur[k] - e) ** 2
    return v

def ecart_type(valeur, proba):
    return sqrt(variance(valeur, proba))
```

On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$0,0625$	$0,25$	$0,375$	$0,25$	$0,0625$

On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$0,0625$	$0,25$	$0,375$	$0,25$	$0,0625$

- L'espérance de X est $\mathbb{E}(X) = 0,0625 + 2 \times 0,25 + 3 \times 0,375 + 4 \times 0,0625 = 2$ et l'écart-type de X est égal à $\sigma(X) = 1$.

On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	$0,0625$	$0,25$	$0,375$	$0,25$	$0,0625$

On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$0{,}0625$	$0{,}25$	$0{,}375$	$0{,}25$	$0{,}0625$

- La fonction Python ci-dessous permet de simuler une image $X(\omega)$ d'une réalisation ω de l'expérience aléatoire.

```
from random import random

def va_algo3():
    tirage = random()
    if tirage < 0.0625: #P(X=)0 = 0.0625
        return 0
    elif tirage < 0.3125: #P(X=1)=0.3125
          - 0.0625 = 0.25
        return 1
    elif tirage < 0.6875: #P(X=2)=0.6875
```

On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	$0,0625$	$0,25$	$0,375$	$0,25$	$0,0625$

On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	$0,0625$	$0,25$	$0,375$	$0,25$	$0,0625$

- `moyenne_echantillon(va, n)` a pour valeur la moyenne de la variable aléatoire `va` sur un échantillon de `n` réalisations de l'expérience aléatoire.

```python
def moyenne_echantillon(va, n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + va()
    return s / n
```

Algorithmique 3, partie 4

On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$0,0625$	$0,25$	$0,375$	$0,25$	$0,0625$

- Le test ci-dessous correspond bien aux valeurs attendues puisque l'espérance de X est égale à 2 donc la valeur moyenne de X sur un échantillon de taille n doit tendre presque sûrement vers 2.

```
In [33]: [moyenne_echantillon(va_algo3
     ,10**k) for k in range(1,7)]

Out[33]: [2.5, 1.94, 2.068, 2.0025,
     1.99629, 2.000393]
```

`proba_cumul(valeur, proba)` retourne la liste des probabilités cumulées $\mathbb{P}(X \leqslant x_k)$ pour toutes les valeurs x_k prises par une variable aléatoire X caractérisée par sa liste de valeurs `valeur` dans l'ordre croissant et sa liste de probabilités correspondantes `proba`.

```python
def proba_cumul(proba):
    n = len(proba)
    probcum = [0 for i in range(n)]
    probcum[0] = proba[0]
    for k in range(1, n):
        probcum[k] = probcum[k-1] + proba[k]
    return probcum
```

va_generique(valeur, probcum) simule l'image $X(\omega)$ par une variable aléatoire X définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire. La variable aléatoire X est caractérisée par sa liste de valeurs valeur dans l'ordre croissant et sa liste de probabilités cumulées correspondantes probacum.

```python
def va_generique(valeur, probcum):
    tirage = random()
    k = 0
    while probcum[k] > tirage:
        k = k + 1
    return valeur[k]
```

`moyenne_echantillon2(valeur, proba, n)` retourne la moyenne sur un échantillon de taille `n` d'une variable aléatoire réelle caractérisée par sa liste de valeurs `valeur` dans l'ordre croissant et sa liste de probabilités correspondantes `proba`.

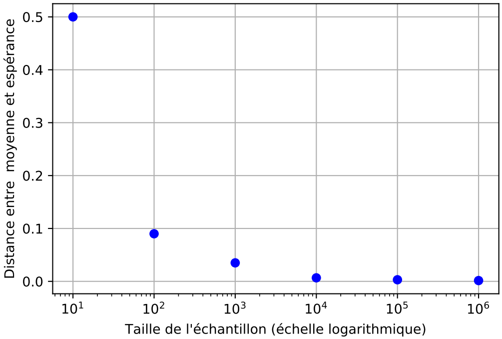
```
def moyenne_echantillon2(valeur, proba, n):
    probcum = proba_cumul(proba)
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + va_generique(valeur, probcum
            )
    return s / n
```

`distance(va, mu, n)` retourne l'écart-absolu pour une variable aléatoire `va` entre la moyenne `m` mesurée sur un échantillon de taille `n` et l'espérance `mu` de cette variable aléatoire (supposée connue).

`distance(va, mu, n)` retourne l'écart-absolu pour une variable aléatoire `va` entre la moyenne `m` mesurée sur un échantillon de taille `n` et l'espérance `mu` de cette variable aléatoire (supposée connue).

```
def distance(va, mu, n):
    m = moyenne_echantillon(va, n)
    return abs(m - mu)
```

Graphiquement, on peut observer que la distance entre l'espérance et la valeur moyenne de la variable aléatoire tend presque sûrement vers 0 lorsque la taille de l'échantillon augmente.

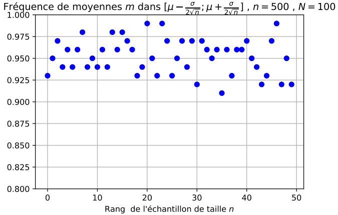


`frequence_fluctuation(va, mu, sigma, N, n)` retourne la fréquence, sur N échantillons de taille n , d'échantillons pour lesquels la moyenne de la variable aléatoire `va` appartient à l'intervalle $\left[\mu - \frac{\sigma}{2\sqrt{n}} ; \mu + \frac{\sigma}{2\sqrt{n}}\right]$ où μ et σ sont l'espérance et l'écart-type, supposés connus, de la variable aléatoire.

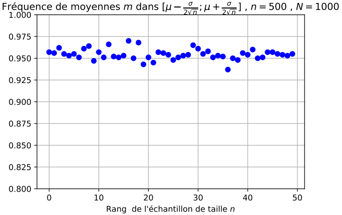
```
from math import sqrt
from random import random

def frequence_fluctuation(va, mu, sigma, N,
        n):
    dedans = 0
    rayon = 2 * sigma / sqrt(n)
    for k in range(N):
        if mu - rayon <= moyenne_echantillon
              (va, n) <= mu + rayon:
            dedans = dedans + 1
    return dedans / n
```

On peut observer que la valeur moyenne de la variable aléatoire définie dans **Algorithme 3** tend presque sûrement vers son espérance 2 lorsque la taille de l'échantillon augmente car la probabilité que m appartienne à l'intervalle $\left[\mu - \frac{\sigma}{2\sqrt{n}} ; \mu + \frac{\sigma}{2\sqrt{n}}\right]$ tend vers $0,95$.

Algorithmique 3 $N = 100$

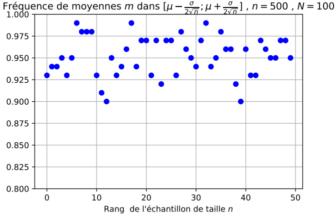


Algorithmique 3 $N = 1000$



On peut observer que la valeur moyenne de la variable aléatoire définie dans **Activité 2** tend presque sûrement vers son espérance $-0,15$ lorsque la taille de l'échantillon augmente car la probabilité que m appartienne à l'intervalle $\left[\mu - \frac{\sigma}{2\sqrt{n}} ; \mu + \frac{\sigma}{2\sqrt{n}}\right]$ tend vers $0,95$.

Activité 2 $N = 100$



Activité 2 $N = 1000$