Exemples du cours sur les complexes Partie 2 2019/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

16 mars 2020

Table des matières

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct, les points A, B et C ont pour affixes respectives $a = -4$, $b = 2$ et $c = 4$. On considère les trois points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = \mathrm{j}a$, $b' = \mathrm{j}b$ et $c' = \mathrm{j}c$ où j est le nombre complexe $-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On a $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

On en déduit que la forme exponentielle de j est $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

Il est plus simple ici de mettre en évidence directement le cosinus et le sinus.

Exemple 7 : Question 2

En déduire les formes algébriques et exponentielles de $a' = \mathrm{j}a$, $b' = \mathrm{j}b$ et $c' = \mathrm{j}c$, sachant que $\mathrm{j} == \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

- $a' = -4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$ sous forme exponentielle et $a' = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$ sous forme algébrique.

  Dans une forme exponentielle, le coefficient multipliant $\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$ doit être positif. S'il est négatif, il faut écrire $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ et un argument est $\theta + \pi$.
- $b' = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ sous forme exponentielle et $b' = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ sous forme algébrique.
- $c' = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ sous forme exponentielle et $c' = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$ sous forme algébrique.

Exemple 8 : Question 1 (source : APMEP)

Donnons la forme algébrique de Z : $Z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \times \overline{z_2}}{z_2 \times \overline{z_2}} = \dfrac{z_1 \times \overline{z_2}}{\left|z_2\right|^2}$ donc

$$Z = \frac{(1-\mathrm{i})(-8+8\sqrt{3}\mathrm{i})}{(-8)^2+(-8\sqrt{3})^2} = \frac{-8+8\sqrt{3}\mathrm{i}+8\mathrm{i}-8\sqrt{3}\mathrm{i}^2}{8^2+3\times 8^2} =$$

$$\frac{(-8+8\sqrt{3})+\mathrm{i}(8+8\sqrt{3})}{4\times 8^2}$$

$$Z = \frac{-1+\sqrt{3}}{32} + \mathrm{i}\frac{1+\sqrt{3}}{32}$$

Comme les deux nombres $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{32}$ et $\dfrac{1+\sqrt{3}}{32}$ sont réels, cette dernière expression est la forme algébrique de Z.

Exemple 8 : Question 2 (source : APMEP)

On a : $|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ et $|z_2| = \sqrt{4 \times 8^2} = 16$ (en réutilisant ce que l'on avait déjà calculé à la question **1.**).

Si on note θ_1 et θ_2 les arguments respectifs de z_1 et z_2, on a :

$\begin{cases} \cos(\theta_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_1) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc on a $\theta_1 = -\dfrac{\pi}{4} \quad (2\pi)$ puis

$\begin{cases} \cos(\theta_2) = \dfrac{-8}{16} = \dfrac{-1}{2} \\ \sin(\theta_2) = \dfrac{-8\sqrt{3}}{16} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc on a

$\theta_2 = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{-2\pi}{3} \quad (2\pi)$.

Z sous forme exponentielle donne :

$$Z = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{16\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{16}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\frac{-2\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{16}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-3\pi}{12}+\mathrm{i}\frac{8\pi}{12}}$$

Finalement, la forme exponentielle de Z est $Z = \dfrac{\sqrt{2}}{16}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$

Et donc, une forme trigonométrique est $Z = \dfrac{\sqrt{2}}{16}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$

On en déduit que

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\mathscr{R}e(Z)}{|Z|} = \frac{\dfrac{-1+\sqrt{3}}{32}}{\dfrac{\sqrt{2}}{16}} = \frac{-1+\sqrt{3}}{32} \times \frac{16}{\sqrt{2}} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\times\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{(-1+\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{2\times 2} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Finalement, on a bien $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exemple 8 : Question 5 (source : APMEP)

On va nommer (E) l'équation à résoudre :

$(E) : (\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos x-(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin x=-2\sqrt{3}.$

$$\begin{aligned}
(E) &\iff \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos x-(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin x}{4}=\frac{-2\sqrt{3}}{4}\\
&\iff \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cos x-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\sin x=\frac{-\sqrt{3}}{2}\\
&\iff \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos x-\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\sin x=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\\
&\iff \cos\left(\frac{5\pi}{12}+x\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

en appliquant la formule rappelée dans l'énoncé

Exemple 8 : Question 5 (fin, source : APMEP))

$$\iff \frac{5\pi}{12}+x=\frac{7\pi}{6} \quad (2\pi) \quad \text{ou} \quad \frac{5\pi}{12}+x=-\frac{7\pi}{6} \quad (2\pi)$$
$$\iff x=\frac{14\pi}{12}-\frac{5\pi}{12} \quad (2\pi) \quad \text{ou} \quad x=-\frac{14\pi}{12}-\frac{5\pi}{12} \quad (2\pi)$$
$$\iff x=\frac{9\pi}{12}=\frac{3\pi}{4} \quad (2\pi) \quad \text{ou} \quad x=\frac{-19\pi}{12}=\frac{5\pi}{12} \quad (2\pi)$$

Finalement, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc

$$\mathscr{S}=\left\{\frac{3\pi}{4}+2k\pi ; \frac{5\pi}{12}+2k\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$$