Corrigé 1

exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Dans ce qui suit, z désigne un nombre complexe.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier.

1. **Affirmation 1 :** L'équation $z - \text{i} = \text{i}(z+1)$ a pour solution $\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.

   Réponse :

$$\begin{aligned} z - \text{i} = \text{i}(z+1) &\Leftrightarrow z - \text{i}z = \text{i} + \text{i} \\ &\Leftrightarrow z(1-\text{i}) = \text{i} + \text{i} \\ &\Leftrightarrow z\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} \\ &\Leftrightarrow z\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{-\pi}{4}} = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} \\ &\Leftrightarrow z = \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \\ &\Leftrightarrow z = \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\left(3\frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

   On a $\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\left(3\frac{\pi}{4}\right)} \neq \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$ car il s'agit de deux formes exponentielles distinctes.
   L'affirmation 1 est donc fausse.

2. **Affirmation 2 :** Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, le nombre complexe $1 + \text{e}^{2\text{i}x}$ admet pour forme exponentielle $2\cos x\text{e}^{-\text{i}x}$.

   Réponse :
   Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$1 + \text{e}^{2\text{i}x} = \text{e}^{\text{i}x}\left(\text{e}^{-\text{i}x} + \text{e}^{\text{i}x}\right)$$

   On a utilisé la relation $\text{e}^{\text{i}x} \times \text{e}^{-\text{i}x} = \left|\text{e}^{\text{i}x}\right| = 1$

$$\begin{aligned} 1 + \text{e}^{2\text{i}x} &= \text{e}^{\text{i}x}\left(\cos(-x) + \text{i}\sin(-x) + \cos(x) + \text{i}\sin(x)\right) \\ 1 + \text{e}^{2\text{i}x} &= \text{e}^{\text{i}x}\left(\cos(x) - \text{i}\sin(x) + \cos(x) + \text{i}\sin(x)\right) \\ 1 + \text{e}^{2\text{i}x} &= 2\cos(x)\text{e}^{\text{i}x} \end{aligned}$$

   ⚠ $2\cos x\text{e}^{\text{i}x}$ est une forme exponentielle si $2\cos x \geqslant 0$.
   Ceci est vrai car $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.
   Néanmoins, on n'a pas $2\cos x\text{e}^{-\text{i}x}$ mais $2\cos(x)\text{e}^{\text{i}x}$, ces deux expressions sont différentes, pour la valeur $\frac{\pi}{3}$ par exemple car $\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}} \neq \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ (à vérifier sur les formes algébriques)
   L'affirmation 2 est donc fausse.

3. **Affirmation 3 :** Un point M d'affixe z tel que $|z - \text{i}| = |z + 1|$ appartient à la droite d'équation $y = -x$.

Réponse :

Notons A le point d'affixe i et et B le point d'affixe -1.

Notons Γ l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z-\mathrm{i}| = |z+1|$.

M appartient à Γ si et seulement si $|z - z_A| = |z - z_B|$. M appartient à Γ si et seulement si $MA = MB$.

Γ est donc la médiatrice du segment $[AB]$.

Γ médiatrice du segment $[AB]$ est la perpendiculaire à $[AB]$ en son milieu I.

Un vecteur normal à la droite Γ est $\overrightarrow{AB}$ d'affixe $z_B - z_A = -1-\mathrm{i}$ donc de coordonnées $(-1\,;\,-1)$.

Une équation de Γ est donc de la forme $-x-y+c=0$

Le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A+z_B}{2} = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{2}$ donc pour coordonnées $(-0,5\,;\,0,5)$.

On en déduit que $-(-0,5)-0,5+c=0 \Leftrightarrow c=0$.

Une équation de Γ est donc $-x-y=0 \Leftrightarrow y=-x$.

$\boxed{\textbf{L'affirmation 3 est donc vraie}}$.

4. On considère le nombre complexe $z = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

a. Affirmation 4 : Le nombre complexe z^2 est un réel positif.

Réponse :

$z = 1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

On en déduit que $z^2 = 2^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = 4\left(-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\boxed{\textbf{L'affirmation 4 est donc fausse}}$.

b. Affirmation 5 : L'argument du nombre complexe $z^{2\,019}$ vaut 0 modulo 2π.

Réponse :

$\arg\left(z^{2\,019}\right) = 2019\arg(z) = 2019\times\dfrac{2\pi}{3} = 1346\pi = 2\times 673\pi$.

On en déduit que l'argument du nombre complexe $z^{2\,019}$ vaut 0 modulo 2π.

$\boxed{\textbf{L'affirmation 5 est donc vraie}}$.

Corrigé 2

exercice 5, correction de l'AMEP

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie par $\begin{cases} z_0 &=& 100 \\ z_{n+1} &=& \dfrac{\mathrm{i}}{3}z_n \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u}\,,\ \vec{v}\right)$.

Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.

1. Pour tout entier naturel n, les points M_n et M_{n+2} ont pour affixes z_n et z_{n+2}.

$z_{n+2} = \dfrac{\mathrm{i}}{3}z_{n+1} = \dfrac{\mathrm{i}}{3}\left(\dfrac{\mathrm{i}}{3}z_n\right) = \dfrac{\mathrm{i}^2}{9}z_n = -\dfrac{1}{9}z_n$

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}M_{n+2}}$ a pour affixe z_{n+2} et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}M_n}$ a pour affixe z_n ; or $z_{n+2} = -\dfrac{1}{9}z_n$ donc $\overrightarrow{\mathrm{O}M_{n+2}} = -\dfrac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{O}M_n}$. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}M_{n+2}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}M_n}$ sont colinéaires donc les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés quel que soit n.

2. On rappelle qu'un disque de centre A et de rayon r, où r est un nombre réel positif, est l'ensemble des points M du plan tels que $\mathrm{A}M \leqslant r$.

Le point M_n appartient au disque de centre O et de rayon 1 si et seulement si $\mathrm{O}M_n \leqslant 1$. On sait que $\mathrm{O}M_n = |z_n|$.

Soit (d_n) la suite définie pour tout n par $d_n = |z_n|$.

Pour tout entier naturel n, on a $z_{n+1} = \frac{\mathrm{i}}{3} z_n$ donc $|z_{n+1}| = \left|\frac{\mathrm{i}}{3} z_n\right| = \left|\frac{\mathrm{i}}{3}\right| \times |z_n| = \frac{1}{3}|z_n|$; donc, $d_{n+1} = \frac{1}{3} d_n$.

De plus, $d_0 = |z_0| = 100$.

La suite (d_n) est définie par $d_0 = 100$ et $d_{n+1} = \frac{1}{3} d_n$, pour tout entier naturel n.

Donc la suite (d_n) est une suite géométrique de premier terme $d_0 = 100$ et de raison $q = \frac{1}{3}$.

- $-1 < q < 1$ donc la suite (d_n) est convergente et a pour limite 0.
  D'après la définition de la limite d'une suite, on peut déduire que l'intervalle $[0\,;1]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, ce qui répond à la question.
- On peut également déterminer le rang n à partir duquel tous les points sont situés dans le disque (*mais ce n'était pas explicitement demandé*).
  On cherche n tel que $d_n < 1$. La suite (d_n) est géométrique de premier terme $d_0 = 100$ et de raison $q = \frac{1}{3}$ donc, pour tout n, $d_n = d_0 \times q^n$ donc $d_n = 100\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
  On résout l'inéquation :
  $$d_n < 1 \iff 100\left(\frac{1}{3}\right)^n < 1 \iff \left(\frac{1}{3}\right)^n < 0,01 \iff \ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) < \ln(0,01) \iff n \times \ln\left(\frac{1}{3}\right) < \ln(0,01)$$
  $$\iff n > \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$$
  Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 4,2$ donc les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1 à partir de $n = 5$.

Corrigé 3

Exercice 8, Centres-Etrangers juin 2014

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z_n par :

$$\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. **a.** $z_1 = \frac{1+\mathrm{i}}{2} z_0 = \frac{1+\mathrm{i}}{2} \times 16 = 8 + 8\mathrm{i}$.

$z_2 = \frac{1+\mathrm{i}}{2} z_1 = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)(8+8\mathrm{i}) = 4 + 4\mathrm{i} + 4\mathrm{i} - 4 = 8\mathrm{i}$.

$z_3 = \frac{1+\mathrm{i}}{2} z_2 = 8\mathrm{i}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right) = 4\mathrm{i} - 4 = -4 + 4\mathrm{i}$.

b. Voir l'annexe.

c. Si $z=\dfrac{1+\text{i}}{2}$ alors $|z|^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{4}$, donc $|z|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\text{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Un argument de $\dfrac{1+\text{i}}{2}$ est donc $\dfrac{\pi}{4}$.

d. $\text{O}A_0=||z_0|=r_0=16$;

$\text{O}A_1=||z_1|=r_1=\sqrt{8^2+8^2}=\sqrt{64\times 2}=8\sqrt{2}$;

$A_0A_1=|z_1-z_0|=|8+8\text{i}-16|=|-8+8\text{i}|=8\sqrt{2}$.

On a donc $\text{O}A_1=A_0A_1$: le triangle est isocèle en A_1 ;

D'autre part $\left(8\sqrt{2}\right)^2+\left(8\sqrt{2}\right)^2=16^2 \iff A_0A_1^2+\text{O}A_1^2=\text{O}A_0^2$ signifie (réciproque du théorème de Pythagore) que le triangle $\text{O}A_0A_1$ est rectangle en A_1.

2. $r_{n+1}=|z_{n+1}|=\left|\dfrac{1+\text{i}}{2}z_n\right|=\left|\dfrac{1+\text{i}}{2}\right|\times|z_n|$ (le module du produit est égal au produit des modules) $=\dfrac{\sqrt{2}}{2}r_n$.

$r_{n+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}r_n$ montre que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On sait que $r_nr_0\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n=16\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

Comme $0<\dfrac{\sqrt{2}}{2}<1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n=0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}r_n=0$.

La suite converge vers 0.

Comme $r_n=|z_n|=\text{O}A_n$, ceci signifie géométriquement que la limite des points A_n est le point O.

3. **a.** Quel que soit le naturel n :

$A_nA_{n+1}=|z_{n+1}-z_n|=\left|\dfrac{1+\text{i}}{2}z_n-z_n\right|=\left|z_n\left(\dfrac{1+\text{i}}{2}-1\right)\right|=\left|z_n\left(\dfrac{-1+\text{i}}{2}\right)\right|=\left|\dfrac{-1+\text{i}}{2}\right|\times|z_n|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}r_n=r_{n+1}$.

b. L_n est donc la somme des n (sauf r_0) premiers termes de la suite géométrique (r_n).

Donc $L_n=8\sqrt{2}\dfrac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

c. On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n=0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}L_n=\dfrac{8\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{16\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{16}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{16\left(\sqrt{2}+1\right)}{2-1}=$ $16\left(\sqrt{2}+1\right)$.