

Classe a la maison du 24/03/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

25 mars 2020

- Propriété de l'intégrale : Chasles
- Propriété de l'intégrale : Linéarité
- Un exercice d'application

Theorem

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Un exemple, on donne $\int_0^2 f(x) dx = 5$ et $\int_0^5 f(x) dx = 7$

- Calculer $\int_2^0 f(x) dx$:

Theorem

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Un exemple, on donne $\int_0^2 f(x) dx = 5$ et $\int_0^5 f(x) dx = 7$

- Calculer $\int_2^0 f(x) dx$:
- $\int_2^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \int_2^2 f(x) dx = 0$ donc
 $\int_2^0 f(x) dx = -\int_0^2 f(x) dx = -5$
- Calculer $\int_2^5 f(x) dx$:

Theorem

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Un exemple, on donne $\int_0^2 f(x) dx = 5$ et $\int_0^5 f(x) dx = 7$

- Calculer $\int_2^0 f(x) dx$:
- $\int_2^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \int_2^2 f(x) dx = 0$ donc
 $\int_2^0 f(x) dx = -\int_0^2 f(x) dx = -5$
- Calculer $\int_2^5 f(x) dx$:
- $\int_0^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx = \int_0^5 f(x) dx = 7$ donc :
 $\int_2^5 f(x) dx = \int_0^5 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx = 7 - 5 = 2$

Theorem

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Un exemple, on donne $\int_0^2 f(x) dx = 5$ et $\int_2^0 g(x) dx = 6$

- Calculer $\int_0^2 3f(x) dx$:

Theorem

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Un exemple, on donne $\int_0^2 f(x) dx = 5$ et $\int_2^0 g(x) dx = 6$

- Calculer $\int_0^2 3f(x) dx$:
- $\int_0^2 3f(x) dx = 3 \int_0^2 f(x) dx = 15$
- Calculer $\int_0^2 3f(x) - 4g(x) dx$:

Theorem

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Un exemple, on donne $\int_0^2 f(x) dx = 5$ et $\int_2^0 g(x) dx = 6$

- Calculer $\int_0^2 3f(x) dx$:
- $\int_0^2 3f(x) dx = 3 \int_0^2 f(x) dx = 15$
- Calculer $\int_0^2 3f(x) - 4g(x) dx$:
- $\int_0^2 3f(x) - 4g(x) dx = 3 \int_0^2 f(x) dx - 4 \int_0^2 g(x) dx$



Attention à l'ordre des bornes! $\int_0^2 g(x) dx = - \int_2^0 g(x) dx$

$$\text{Donc } \int_0^2 3f(x) - 4g(x) dx = 3 \int_0^2 f(x) dx + 4 \int_2^0 g(x) dx = \\ 3 \times 5 + 4 \times 6 = 39$$



Ne pas confondre les propriétés de Chasles et de linéarité :

- $\int_0^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx = \int_0^6 f(x) dx$ par Chasles (bornes consécutives)
- $\int_0^3 2f(x) dx = 2 \int_0^3 f(x) dx$ par linéarité (mêmes bornes)
- $\int_0^3 2f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx \neq \int_0^3 3f(x) dx$

On ne peut pas simplifier cette somme d'intégrale, en appliquant Chasles et la linéarité on peut obtenir par exemple :

$$\int_0^3 2f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx = 3 \int_0^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$$

Exercice d'application : énoncé

Lire d'abord la méthode 4 page 190 et faire l'exercice 53 page 199 corrigé à la fin du manuel, traiter ensuite l'exercice suivant.

On considère les intégrales $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx$

- 1 Calculer I .
- 2 En utilisant la linéarité, calculer $I + J$ puis en déduire la valeur de J .

Exercice d'application : corrigé

- ① Par ailleurs, on a $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx = [\ln(e^x+1)]_0^1$ Donc
 $I = \ln(e^1+1) - \ln(e^0+1) = \ln(e^1+1) - \ln(2) = \ln\left(\frac{e^1+1}{2}\right)$.
- ② Par linéarité, on a :

$$I + J = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{1}{e^x+1} dx = \int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+1} dx = \int_0^1 1 dx = 1$$

$$\text{On a donc } J = 1 - I = 1 - \ln\left(\frac{e^1+1}{2}\right) = \ln\left(\frac{2e}{e^1+1}\right)$$