QCM Pronote Calcul Intégral 4

Reprise demain. Il manquait les affirmations.

Question 1 : Q1

Soit f une fonction définie sur l'intervalle |-8;4] dont on donne le tableau de variation ci-dessous.
Soit F une primitive de f sur l'intervalle [-8;4].
Dans un repère du plan la courbe de F admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses aux points d'abscisses -6 et 1.
De plus on sait que F(-5) = 1

- **Affirmation 1 :** F est décroissante sur l'intervalle [2 ; 4].
- **Affirmation 2 :** Il existe un réel x tel que F (x) < 1.
- **Affirmation 3 :** La tangente à la courbe de F au point d'abscisse −5 passe par le point de coordonnées (−2 ; −5).

x	-8		-5		2		4
$f(x)$	6	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

L'affirmation 1 est vraie

L'affirmation 2 est vraie

L'affirmation 3 est vraie

Question 2 : Q2

Soit p la fonction continue, définie sur R par $\frac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$

- [ ] Une primitive de f est $F(x)=\ln((e^{0,2x}+1)^5)$
- [ ] Une primitive de f est $F(x)=\ln(2(e^{0,2x}+1)^5)$
- [ ] Une primitive de f est $F(x)=\ln(e^{0,2x}+1)$
- [ ] $\frac{1}{2}\int_8^{10} p(x)\mathrm{d}x=2,5\ln\left(\frac{1+e^2}{1+e^{1,6}}\right)$
- [ ] Une primitive de f est $F(x)=\frac{-5}{1+e^{0,2x}}$

On commence par une petite question (QCM Pronote)
L'énoncé de la question précédente est incomplet.

- Si $F(x) = \ln(e^{0,2x}+1) = \ln(u(x))$

$$F'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{0,2\,e^{0,2x}}{e^{0,2x}+1}$$

- Si $F(x) = \ln((e^{0,2x}+1)^5) = 5\times\ln(e^{0,2x}+1)$

donc $F'(x) = 5\times\frac{0,2\times e^{0,2x}}{e^{0,2x}+1} = p(x)$

- $\frac{1}{2}\int_8^{10} p(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[5\times\ln(e^{0,2x}+1)\right]_8^{10}$

$$= \frac{5}{2}\left(\ln(e^2+1) - \ln(e^{1,6}+1)\right) = 2,5\ln\left(\frac{e^2+1}{e^{1,6}+1}\right)$$

- $F(x) = \ln(2(e^{0,2x}+1)^5) = \ln(2) + 5\ln(e^{0,2x}+1)$

donc $F'(x) = 0 + \underbrace{5\times\frac{0,2\,e^{0,2x}}{e^{0,2x}+1}}_{p(x)} = p(x)$

QCM Pronote Calcul Intégrals

Question 1 : Q1

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a;b], l'intégrale $\int_a^b 2f(x)\mathrm{d}x$ est égale à

- [ ] $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- [ ] $-2\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$
- [ ] $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\mathrm{d}x$

$$\boxed{} \int_a^b 2 f(x)\,dx \underset{\text{linéarité}}{=} 2 \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\boxed{} \quad -2 \int_b^a f(x)\,dx = 2 \times (-1) \times \int_b^a f(x)\,dx$$

$$= 2 \times \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\boxed{} \quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Question 2 : Q2

La valeur moyenne de la fonction f(x)=1/x sur l'intervalle [2;3] est

Vrai — égale à 1/6 fois la valeur moyenne de la fonction inverse sur l'intervalle [1/2;1/3] $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$

Fausse — égale à la valeur moyenne de la fonction inverse sur l'intervalle [1/2;1/3] $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$

Vrai — égale à ln(1,5)

Vrai — positive

- Pour tout $x \in [2;3]$, $0 \leq \frac{1}{x}$

donc par croissance de l'intégrale

$$\int_2^3 0\,dx \leq \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx$$

donc $0 \leq \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx$

La valeur moyenne de $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[a;b]$ est :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)\,dx$$

sur $[2;3]$: $\frac{1}{3-2} \times \int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 f(x)\,dx$

- Valeur moyenne de $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} \times \int_{1/3}^{1/2} \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{6}}\left[\ln(x)\right]_{1/3}^{1/2}$$

$= 6 \times \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{3}\right) \right)$

$= 6 \times \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

Or $\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx$ est la valeur moyenne de $\frac{1}{x}$ sur $[2;3]$

Question 3 : Q3

Le coût de fabrication d'une machine en centaines d'euro est donnée par $g(x)=2x-1+e^{0,05x}$ sur l'intervalle [0;100].
La valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle [0;100] est

- [ ] égale à $9880+20e^5$
- [ ] égale à une autre valeur
- [x] le coût moyen de production d'une machine pour une production comprise entre 0 et 100 machines
- [x] égale à $98,8+0,2e^5$

Valeur moyenne de g sur $[0;100]$

$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx = \frac{1}{100-0} \times \int_0^{100} g(x)\,dx$

$\mu = \frac{1}{100} \times \left[x^2 - x + 20 \times e^{0,05x} \right]_0^{100}$

Primitive de $g(x) = 2x - 1 + e^{0,05x}$

$G(x) = x^2 - x + \frac{1}{0,05} e^{0,05x}$

$G(x) = x^2 - x + 20 \times e^{0,05x}$

$$\mu = \frac{1}{100} \times \left(G(100) - G(0) \right)$$

$$\mu = 38{,}18 + 0{,}2e^{5}$$

Exemple 14

Pour tout réel x :

$g(x) - f(x) = 1 - \cos(x)$

donc $g(x) - f(x) \geq 0$

L'aire recherchée est l'aire entre les 2 courbes sur $[0 ; x_B]$ $\quad 12 \leq x_B < 13$

$$\int_0^{x_B} g(x) - f(x)\,dx$$

x_A et x_B sont les abscisses des points de contact entre $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$

On résout :

$g(x) - f(x) = 0$

$\iff 1 - \cos(x) = 0$

$\iff 1 = \cos(x)$

$\iff \cos(0) = \cos(x)$

$\iff x = k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Sur l'intervalle $[0 ; 13]$ les solutions sont 0, 2π et $4\pi = x_B$

L'aire du domaine hachuré est :

$$\int_0^{4\pi} g(x) - f(x)\,dx = \int_0^{4\pi} 1 - \cos(x)\,dx$$

$$\int_0^{4\pi} g(x) - f(x)\,dx = \left[x - \sin(x)\right]_0^{4\pi}$$

$$= 4\pi - \sin(4\pi) - (0 - \sin 0)$$

$$= 4\pi$$

Exemple 15

1) Distance entre $t=1$ et $t=e^2$

$$\int_1^{e^2} v(t)\,dt = \left[-\frac{1}{t}+\ln(t)\right]_1^{e^2}$$

$$= -\frac{1}{e^2}+\ln(e^2)$$

$$-\left(-\frac{1}{1}+\ln(1)\right)$$

$$= -e^{-2}+3$$

3) Vitesse moyenne entre $t=1$ et $t=e^2$:

$$\text{Vitesse moyenne} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$$

$$\text{Vitesse moyenne} = \frac{1}{e^2-1}\times\int_1^{e^2} v(t)\,dt = \frac{3-e^{-2}}{e^2-1}$$