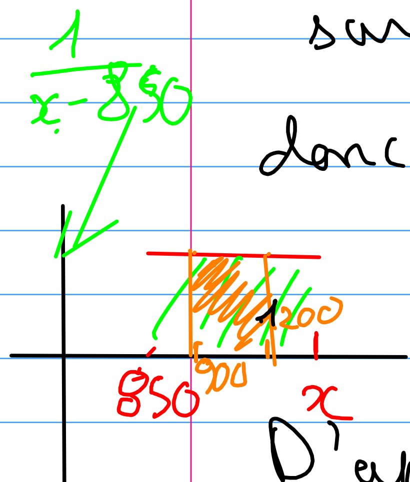
Cours

Exemple 4 :

M suit une loi uniforme sur l'intervalle [850 ; x].



donc a pour densité

$$f(t) = \frac{1}{x-850}$$

D'après le cours :

$$P(900 \le M \le 1200) = \int_{900}^{1200} f(t)\,dt$$

$$0,75 = \int_{900}^{1200} \frac{1}{x-850}\,dt$$

$$0,75 = \left[\frac{1}{x-850} \times t\right]_{900}^{1200} = \frac{1200-900}{x-850}$$

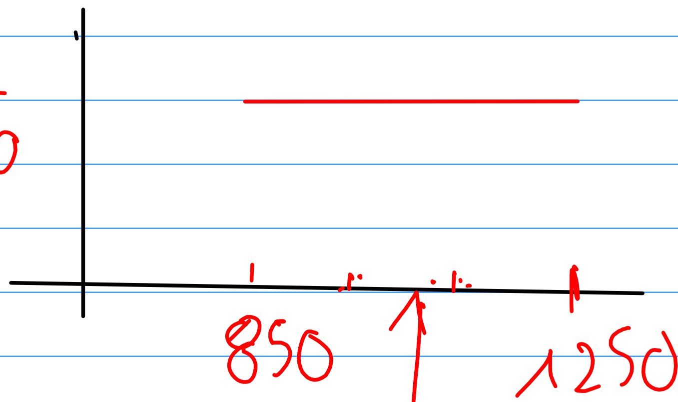
$$0,75 = \frac{300}{x-850}$$

$$0,75x = 0,75 \times 850 + 300 =$$

$$x = 1250$$

2)

$\frac{1}{1250-850} = \frac{1}{400}$



$E(M) = \frac{a+b}{2} = \frac{850+1250}{2}$

On peut le calculer :

$$E(M) = \int_a^b t \times \underline{f(t)\,dt}$$

$$E(M) = \int_{850}^{1250} t \times \frac{1}{400}\,dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \times \frac{1}{400}\right]_{850}^{1250}$$

E(M) est l'espérance de M, c'est la valeur moyenne de M.

Rque :

X gain à un jeu :

k	-1	1	2
$P(X=k)$	$0,5$	$0,25$	$0,25$

$$E(X) = -1 \times P(X=-1) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2)$$

Question 1

T suit une loi exponentielle de paramètre λ et de densité $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

$$P(T \leq 3) = \int_0^3 \lambda e^{-\lambda t} \, dt$$

primitive ?

$$P(T \leq 3) = \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^3$$

$$P(T \leq 3) = -e^{-3\lambda} - (-e^{-3 \times 0})$$

$$P(T \leq 3) = -e^{-3\lambda} + 1 = 1 - e^{-3\lambda}$$

Question 2 :

L'évènement contraire de $T \geq 3$ est $T < 3$

donc $P(T \geq 3) = 1 - P(T<3)$

De plus T suit une loi à densité donc $P(T=3) = 0$

donc $P(T<3) = P(T \leq 3)$

Donc $P(T \geq 3) = 1 - P(T \leq 3)$

$$= 1 - (1 - e^{-3\lambda})$$

$$\boxed{P(T \geq 3) = e^{-3\lambda}}$$

⚠ Si on calcule $P(T \geq 3)$ avec une intégrale de la fonction densité, il s'agit d'une limite :

$$P(T \geq 3) = \lim_{x \to +\infty} \int_3^x \underbrace{\lambda e^{-\lambda t}}_{\text{primitive}} \, dt$$

$$P(T \geq 3) = \lim_{x \to +\infty} \left(\left[-e^{-\lambda t} \right]_3^x \right)$$

$$P(T \geq 3) = \lim_{x \to +\infty} \left(-e^{-\lambda x} + e^{-3\lambda}\right)$$

On a $\lim_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$ car $\lambda > 0$

donc par somme :

$$P(T \geq 3) = e^{-3\lambda}$$

<u>Question 3</u> : Calcul de $P(3 \leq T \leq 4)$

$$P(3 \leq T \leq 4) = \int_3^4 \lambda e^{-\lambda t} \, dt$$

$$= \left[-e^{-\lambda t}\right]_3^4$$

$$P(3 \leq T \leq 4) = -e^{-4\lambda} + e^{-3\lambda}$$

<u>Question 4</u> :

$$P_{(T \geq 3)}(T \geq 8) = P(T \geq 5)$$

d'après la propriété de durée de vie sans vieillissement de la loi exponentielle.

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

donc $$P_{(T\geq 3)}(T\geq 8) = \frac{P((T\geq 8)\cap(T\geq 3))}{P(T\geq 3)}$$

$$P_{(T\geq 3)}(T\geq 8) = \frac{P(T\geq 8)}{P(T\geq 3)}$$

$$P_{(T\geq 3)}(T\geq 8) = \frac{e^{-(5+3)\lambda}}{e^{-3\lambda}}$$

$$P_{(T\geq 3)}(T\geq 8) = e^{-(5+3)\lambda+3\lambda}$$

$$P_{(T\geq 3)}(T\geq 8) = e^{-5\lambda} = P(T\geq 5)$$

avec $8-3=5$