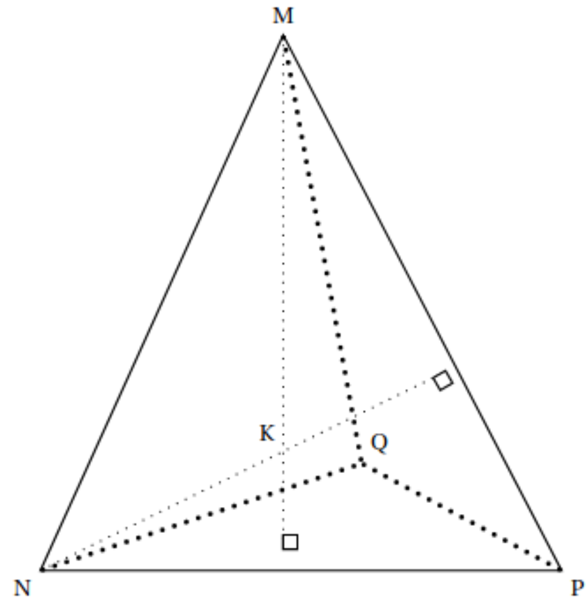
**Partie B Une propriété des tétraèdres orthocentriques**

Dans cette partie, on considère un tétraèdre MNPQ dont les hauteurs issues des sommets M et N sont sécantes en un point K. Les droites (MK) et (NK) sont donc orthogonales aux plans (NPQ) et (MPQ) respectivement.




1. **a.** Justifier que la droite (PQ) est orthogonale à la droite (MK) ; on admet de même que les droites (PQ) et (NK) sont orthogonales.

   **b.** Que peut-on déduire de la question précédente relativement à la droite (PQ) et au plan (MNK) ? Justifier la réponse.

2. Montrer que les arêtes [MN] et [PQ] sont orthogonales.

   Ainsi, on obtient la propriété suivante :

   Si un tétraèdre est orthocentrique, alors ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.

   (On dit que deux arêtes d'un tétraèdre sont « opposées » lorsqu'elles n'ont pas de sommet commun.)

Exercice 2 de la fiche d'exercices
(extrait de Métropole juin 2018)

1) a)
Montrons que (MK) orthogonale à (PQ)

- la droite (MK) est orthogonale au plan (PNQ) donc : (MK) est orthogonale à toute droite contenue dans (PNQ) et en particulier à (PQ)

- De même on démontre que $(NK) \perp (PQ)$.

b) On a :

d'une part $(PQ) \perp (NK)$
d'autre part $(PQ) \perp (MK)$
donc $(PQ)$ est orthogonale au plan $(MNK)$

2) $(PQ)$ est orthogonale au plan $(MNK)$
donc est orthogonale à toute droite contenue dans $(MNK)$
et en particulier à $(MN)$.

QCM repérage

Question 1

- $\vec{CL} = \vec{CD} + \vec{DK} + \vec{KL}$

$$= \vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{BF} - \frac{1}{2}\vec{BC}$$

$$\vec{CL} = -\frac{1}{2}\vec{BC} + 1\,\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{BF}$$

$$\vec{CL}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

- $\vec{GE} = \vec{GH} + \vec{HE}$

$\vec{GH} = \vec{CD} = \vec{BA}$

$\vec{HE} = \vec{DA} = \vec{CB} = -\vec{BC}$

donc $\vec{GE} = \vec{BA} - \vec{BC}$

- N $(0,5\,;\,0,5\,;\,0,5)$ $\quad \vec{NK}\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$

K $(1\,;\,1\,;\,0,5)$

$\overrightarrow{NK} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{NK} = 0,5\overrightarrow{BC} + 0,5\overrightarrow{BA}$

donc $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont coplanaires

- $A(0;1;0)$ donc $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E(0;1;1)$

or $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

$x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{BA}$ ne peut pas être égal à $\overrightarrow{AE}$

donc $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AE}$ pas coplanaires