n°51 p.288

Représentation paramétrique d'une droite de l'espace :

Δ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t-2 \\ y = 4 \\ z = 2t-1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Coordonnées de deux points de la droite :

1) • pour $t=0$ on a $A(-2;4;-1)$

• pour $t=1$ on a $C(-1;4;1)$

• pour $t=2$ on a $B(0;4;3)$

A, B, C sont des points de Δ.

Vecteurs directeurs de Δ :

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ d'après la repr... param.

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}x_A-x_B\\y_A-y_B\\z_A-z_B\end{pmatrix}$

2) $M(-3;4;-3)$ appartient-il à Δ ?

On résout le système.

$$\begin{cases}-3=t-2\\4=4\\-3=2t-1\end{cases} \iff \begin{cases}-1=t\\4=4\\-1=t\end{cases}$$

Le système a une unique solution donc $M\in\Delta$

4) Il suffit de choisir une autre origine et un autre vecteur directeur pour obtenir une autre représentation paramétrique de la droite Δ.

Par exemple avec $B(0;4;3)$ et $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$ on obtient :

$$\Delta\begin{cases}x=0-2t\\y=4\\z=3-4t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

$\boxed{\text{n° 52 p.288}}$

$A(-4\,;1\,;2)$ et $B(-1\,;2\,;5)$

1) Représentation paramétrique de (AB)

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$$

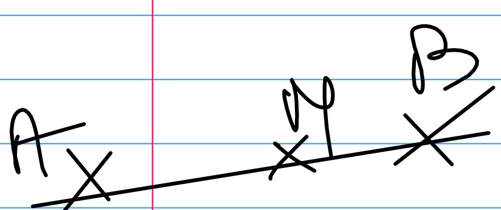
$$(AB)\left\{\begin{array}{l} x = x_A + t\, x_{\overrightarrow{AB}} \\ y = y_A + t\, y_{\overrightarrow{AB}} \quad , t\in\mathbb{R} \\ z = z_A + t\, z_{\overrightarrow{AB}} \end{array}\right.$$

$$\boxed{(AB)\left\{\begin{array}{l} x = -4 + t\times 3 \\ y = 1 + t\times 1 \quad , t\in\mathbb{R} \\ z = 2 + t\times 3 \end{array}\right.}$$

2)

$M\in[AB]$ ssi il existe $t\in[0\,;1]$,

tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$



Une représentation paramétrique du segment [AB] est donc :

$$[AB]\begin{cases} x = -4 + t\times 3 \\ y = 1 + t\times 1 \\ z = 2 + t\times 3 \end{cases} \text{ avec } t\in[0;1]$$

$\underbrace{}_{\text{origine } A}$ coordonnées de $\overrightarrow{AB}$

3)

$M\in[AB)$ ssi il existe $t\in[0;+\infty[$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$

$$\boxed{[AB)\begin{cases} x = -4 + t\times 3 \\ y = 1 + t\times 1 \\ z = 2 + t\times 3 \end{cases} \text{ avec } t\in[0;+\infty[}$$

Cours :

$\boxed{\text{Exemple 8}}$

$\mathcal{D}$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 4-3t \\ y = 2t-1 \\ z = 8+t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

1) On va d'abord mettre la représen-tation paramétrique sous forme canonique

$$\mathcal{D} \begin{cases} x = 4-3t \\ y = -1+2t \\ z = \frac{8}{4}+\frac{1}{4}t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

Un point de la droite $\mathcal{D}$ est :

$E(4;-1;2)$ paramétré par $t=0$

Un vecteur directeur est :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

2) Soit $A(19\,;\,-11\,;\,7)$

Pour déterminer si A appartient à $\mathcal{D}$ on résout le système :

$$\begin{cases} 19 = 4-3t \\ -11 = -1+2t \\ 7 = 2+\frac{1}{4}t \end{cases} \iff \begin{cases} t = -5 \\ t = -5 \\ t = 20 \end{cases}$$

Le point A n'appartient pas à la droite car le système n'a pas de solution car les équations sont incompatibles.

3)

(BC) parallèle à $\mathcal{D}$ ssi des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et (BC) sont colinéaires.

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$

$\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de (BC)

est : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -12 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont non nuls
donc ils sont colinéaires
ssi il existe un réel k tel que
$\vec{u} = k\overrightarrow{BC}$.

$\vec{u} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -12k \\ 2 = 5k \\ \frac{1}{4} = k \end{cases}$

$\vec{u} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} = k \\ \frac{2}{5} = k \\ \frac{1}{4} = k \end{cases}$

Les équations sont incompatibles, donc le système n'a pas de solution donc les vecteurs ne sont pas colinéaires donc (BC) et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles.

Droites coplanaires		Droites non coplanaires
Droites parallèles	Droites sécantes	

sans intersection

4) (BC) et $\mathcal{D}$ n'étant pas parallèles :

- soit elles ont un point d'intersection et elles sont sécantes

- soit elles n'ont pas d'intersection et elles sont non coplanaires.

Pour déterminer si $\mathcal{D}$ et (BC) ont une intersection, on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{D}\left\{\begin{array}{l} x = 4 - 3t \\ y = -1 + 2t \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + \frac{1}{4}t \end{array}\right. \\ \text{ET} \\ (BC)\left\{\begin{array}{l} x = 3 + u \times (-12) \\ y = 2 + u \times 5 \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + u \times 1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

origine B

vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$

Il est équivalent de résoudre le système en écrivant les égalités entre les seconds membres des équations paramétriques (on oublie provisoirement (x,y,z) les coordonnées de l'intersection cherchée.

$$\begin{cases} 4-3t = 3 + u \times (-12) \\ -1+2t = 2 + u \times 5 \\ 2 + \frac{1}{4}t = -1 + u \times 1 \end{cases}$$

$M \in \mathcal{D}$ $\qquad\qquad$ $M \in (BC)$

On résout ce système de 3 équations à 2 inconnues u et t :

$$\begin{cases} 4-3t = 3-12u \\ -1+2t = 2+5u \\ 2+\frac{1}{4}t = -1+u \end{cases}$$

sous-système

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-3t = 3-12u \\ -1+2t = 2+5\left(3+\frac{1}{4}t\right) \\ 3+\frac{1}{4}t = u \end{cases}$$

on résout par substitution

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-3t = 3-12u \\ -1+2t = 2+15+\frac{5}{4}t \\ u = 3+\frac{1}{4}t \end{cases}$$

une seule inconnue

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-3t = 3-12u \\ \frac{3}{4}t = 18 \\ u = 3+\frac{1}{4}t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-3\times 24 = 3-12\times 9 \\ t = 24 \\ u = 3+6 = 9 \end{cases}$$

on substitue dans la 1ère équation

on a résolu le sous-système

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6\delta = -105 & \text{faux} \\ t = 24 \\ u = 9 \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution donc les droites n'ont pas d'intersection comme elles n'ont pas d'intersection elles ne sont pas coplanaires.

$\boxed{\text{Exercice 7 fiche d'exos}}$