

Séance du 28/05

## Exercice de la fiche 1

Dans l'espace soit les points  
 $A(8; 0; 8)$  et  $B(10; 3; 10)$

1) Soit la droite  $\Delta = (AB)$

Un vecteur directeur est :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Une représentation paramétrique de  $\Delta$  est :

$$\Delta \begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = 0 + 3t \\ z = 8 + 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

point mobile      origine  $A$       vecteur directeur  $\vec{u}$

2) Soit  $\Delta$  la droite de représentation paramétrique :

$$\Delta \begin{cases} x = -5 + 3s \\ y = 1 + 2s \\ z = -2s \end{cases} \text{ avec } s \in \mathbb{R}$$

Soit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$  un vecteur directeur de  $\Delta$ .

Un vecteur directeur de  $\Delta$  est :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls donc ils

sont colinéaires ssi il existe un

réel  $k$  tel que  $\vec{v} = k \vec{u}$

$$\vec{v} = k \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 2k \\ 2 = 3k \\ -2 = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ k = \frac{2}{3} \\ k = -1 \end{cases}$$

Les équations sont incompatibles  
donc les vecteurs ne sont pas  
colinéaires donc les droites ne  
sont pas parallèles.

On détermine si les droites  
D et D' sont sécantes.

On résout le système consti-  
-tue des 2 représentations paramé-  
-triques

$$\begin{cases} -5 + 3s = 8 + 2t & \leftarrow \text{équation de} \\ & \text{compatibilité} \\ 1 + 2s = 3t & \leftarrow \text{on résout} \\ -2s = 8 + 2t & \text{ce sous système} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 + 3s = 8 + 2t \\ 1 + 2(-4 - t) = 3t & \leftarrow \text{équation} \\ s = \frac{8 + 2t}{-2} = -4 - t & \text{du 1er} \\ & \text{degré} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 + 3s = 8 + 2t \\ t = -\frac{7}{5} \\ s = -4 + \frac{7}{5} = -\frac{13}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 - \frac{39}{5} = 8 - \frac{14}{5} \\ t = -\frac{7}{5} \\ s = -\frac{13}{5} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{64}{5} = \frac{26}{5} \\ t = -\frac{7}{5} \\ s = -\frac{13}{5} \end{cases}$$

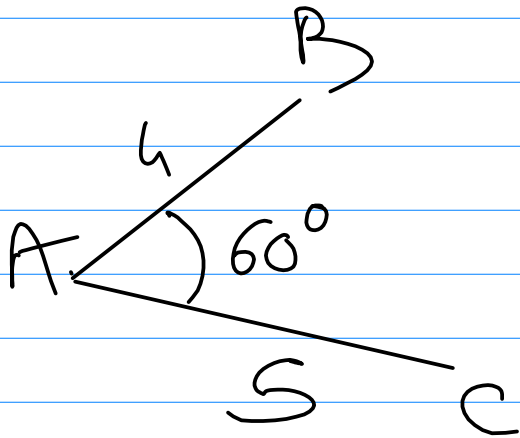
Le système n'a pas de solution  
 donc les droites  $D$  et  $\Delta$  ne  
 sont pas sécantes  
 De plus  $D$  et  $\Delta$  ne sont pas  
 parallèles, donc  $D$  et  $\Delta$  ne  
 sont pas coplanaires.

## Produit scalaire dans l'espace

• quelques questions sur le  
 produit scalaire :

Q1 Soit  $ABC$  un triangle

tel que  $AB=4$  et  $AC=5$



Formule du cosinus :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$
$$= 4 \times 5 \times \cos(60^\circ)$$

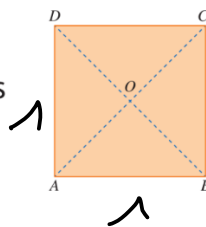
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 20 \times \cos\left(\frac{\pi}{3} \text{ rad}\right)$$
$$= 20 \times \frac{1}{2} = 10$$

Q2

VRAI ou FAUX

$ABCD$  est un carré de centre  $O$  et de côté 1. Indiquer si les égalités suivantes sont vraies ou fausses.

- a.  $\vec{OB} \cdot \vec{OD} = 0$
- b.  $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$
- c.  $\vec{AC} \cdot \vec{AD} = 1$



Diagonale  
 $BD =$

$$\vec{OB}, \vec{OD} = OB \times OD \times \cos(\widehat{BOD})$$

$$\vec{OB}, \vec{OD} = OB \times OD \times \cos(\pi)$$

$$OB, OD = OB^2 \times (-1) = -OB^2$$

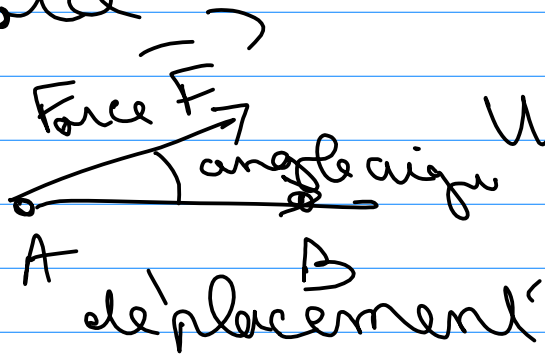
D'après Pythagore :

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 = 2$$

$$OB^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

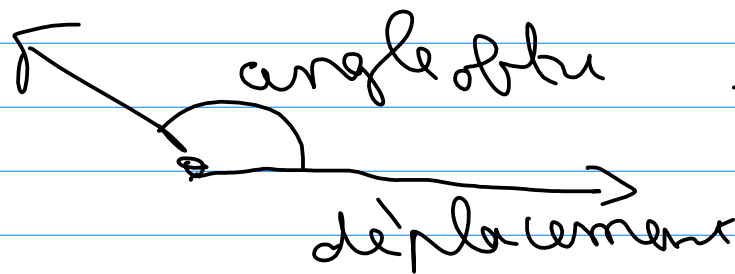
Le produit-scalaire en Physique permet de calculer le travail d'une force

travail moteur



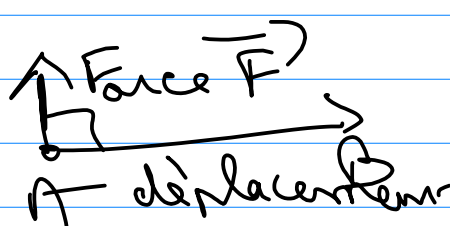
$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB} > 0$$

travail résistant



$$\vec{F} \cdot \vec{AB} < 0$$

travail nul

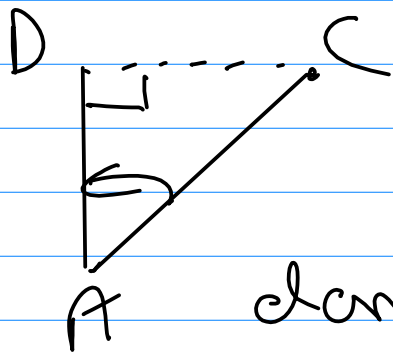


$$\vec{F} \cdot \vec{AB} = 0$$

Faux a)  $\vec{OB} \cdot \vec{OD} = 0$  est faux  
car  $\vec{OB} = -\vec{OD}$   
donc  $\vec{OB} \cdot \vec{OD} = -OD^2 < 0$

Vrai b)  $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$  car  $\vec{AB}$  orthogonal  
à  $\vec{BD}$   
 $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = AC \times BD \times \cos(\widehat{COD})$   
 $\widehat{COD} = \frac{\pi}{2}$  donc  $\cos(\widehat{COD}) = 0$

Vrai c)  $\vec{AC} \cdot \vec{AD} = AD \times AC \times \cos(\widehat{CAD})$



$$\cos(\widehat{CAD}) = \frac{AD}{AC}$$

donc  $AC \times \cos(\widehat{CAD}) = AD$

$$\text{donc } \vec{AC} \cdot \vec{AD} = AD^2 = 1^2 = 1$$

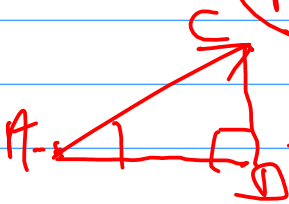
Le produit scalaire possède  
la propriété de la projection  
orthogonale :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = AD \times AD \times \cos(\widehat{DAD})$$

$$= AD^2 \times \cos(0)$$

$$= AD^2$$

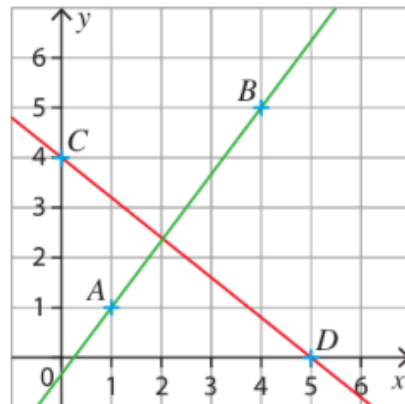
on peut remplacer AC par son projeté orthogonal sur (AD)



**Q3**  $A(1;1)$   $B(4;5)$   $C(0;4)$   
 $D(5;0)$

Dans le repère orthonormé ci-dessous, les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  ont des coordonnées entières.

Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont-elles perpendiculaires ?





On calcule les coordonnées  
les vecteurs de référence :

$$\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$x \quad y$                        $x' \quad y'$

Rappel :  $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$   
dans un repère orthonormal

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

On peut calculer  $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$  :

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = -5 \times 3 + 4 \times 4 = 1$$

$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} \neq 0$  donc  $\overrightarrow{DC}$  et  $\overrightarrow{AB}$

ne sont pas orthogonaux

donc  $(DC)$  et  $(AB)$  ne sont  
pas orthogonales