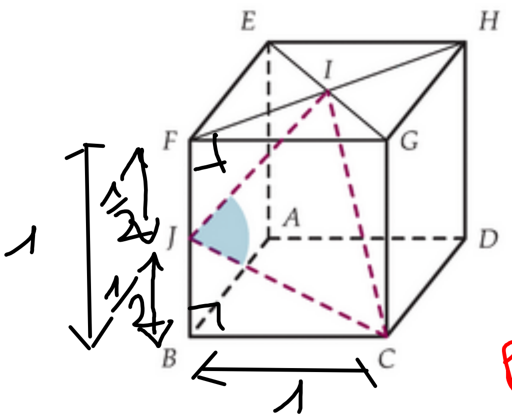
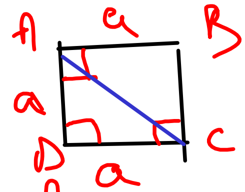
Exercice 18 p. 314

18 On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1. Soit I le centre de la face $EFGH$ et J le milieu de l'arête $[BF]$.



La diagonale d'un carré de côté a



Pythagore :
$AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ donc $\boxed{AC = a\sqrt{2}}$

On cherche à calculer une mesure de l'angle $\widehat{CJI}$ au degré près.

1) Méthode géométrique :

a) • Dans le triangle rectangle en B, JBC on applique le théorème de Pythagore

$$JC^2 = JB^2 + BC^2$$

$$JC^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \quad \text{donc} \quad \boxed{JC = \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

• Dans le triangle rectangle en F FIJ :

$$JI^2 = FI^2 + FJ^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$JI^2 = \frac{3}{4}$ donc $\boxed{JI = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

De même avec Pythagore dans IGC :

$IC^2 = IG^2 + GC^2$

$IC^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{2}{4} + 1 = \frac{3}{2}$

donc $\boxed{IC = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}}$

b) On applique la formule suivante :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

On peut calculer le produit scalaire dans un triangle uniquement avec les longueurs des côtés

Ici :

$\vec{JC} \cdot \vec{JI} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{JC}\|^2 + \|\vec{JI}\|^2 - \|\vec{JC} - \vec{JI}\|^2\right)$

Or $\overrightarrow{JC} - \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{IJ}$

$= \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{IC}$

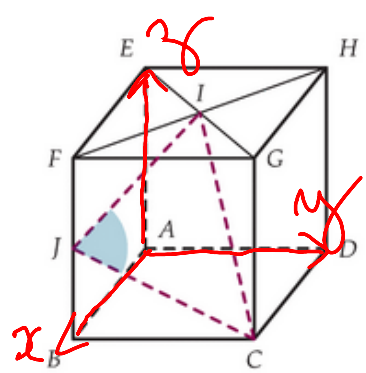
Chasles

$$\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{JI} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}}$$

3) On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

18 On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1. Soit I le centre de la face $EFGH$ et J le milieu de l'arête $[BF]$.



On cherche à calculer une mesure de l'angle $\widehat{CJI}$ au degré près.

$J(1\,;0\,;0{,}5)$ $\quad \overrightarrow{AJ} = 1\overrightarrow{AB} + 0\,\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

$C(1\,;1\,;0)$

$I\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$ $\quad \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 1\,\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + 1\,\overrightarrow{AE}$

On a donc :

$\overrightarrow{JC}\begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 0-0{,}5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-1 \\ \frac{1}{2}-0 \\ 1-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{JC}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

On en déduit que :

$\overrightarrow{JC}\cdot\overrightarrow{JI} = 0\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\times\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}$

$$\boxed{\overrightarrow{JC}\cdot\overrightarrow{JI} = \frac{1}{4}}$$

on utilise la formule avec

Le cosinus :

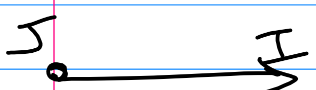
$$\overrightarrow{JC}\cdot\overrightarrow{JI} = \|\overrightarrow{JI}\| \times \|\overrightarrow{JC}\| \times \cos(\widehat{IJC})$$

$$\overrightarrow{JC}\cdot\overrightarrow{JI} = \underset{?}{JI} \times \underset{?}{JC} \times \cos(\widehat{IJC})$$

donc $\cos(\widehat{IJC}) = \dfrac{\overrightarrow{JC}\cdot\overrightarrow{JI}}{JI \times JC}$

Pour calculer les longueurs JI :

$$\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{JI} = \underbrace{JI^2}_{\text{longueur au carré}}$$



$$0^2+1^2+(-0,5)^2 = JC^2$$

$JC^2 = \dfrac{5}{4}$ donc $JC = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

De même $JI^2 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$

$$JI = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On en déduit que :

$$\cos \widehat{ISC} = \frac{\frac{1}{\cancel{4}}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\sqrt{5}}{\cancel{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

$$\boxed{\widehat{ISC} = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{15}\right) \simeq 75^\circ}$$

Exemple 2 du cours

$A(-1;2;0)$ $B(1;2;4)$ $C(-1;1;1)$

1.) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ssi il existe k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

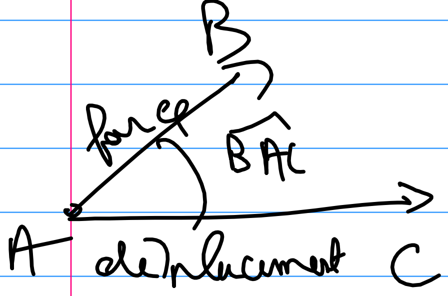
$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} 2 = k \times 0 \\ 0 = -k \\ 4 = k \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = 0 \text{ absurde} \\ k = 0 \\ k = 4 \end{cases}$$

le système n'a pas de solution
les vecteurs ne sont pas colinéaires
les points ne sont pas alignés !

2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 0 + 0 \times (-1) + 4 \times 1 = 4$

3) Formule du cosinus :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$



donc $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$

Or $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2$

$2^2 + 4^2 = AB^2$

$AB = \sqrt{20} = \sqrt{5 \times 4}$

$AB = \sqrt{5} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{5}$

et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2$

$2 = AC^2$

donc $AC = \sqrt{2}$

On en déduit que :

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{4}{2\sqrt{5}\times\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

donc $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right) \simeq 51°$

Orthogonalité

Théorème 3 :

Dans le plan :

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ équivaut à $(OA) \perp (OB)$

Exemple 3 :

$\begin{cases} x = 4+3t \\ y = -2+t \,,\; t \in \mathbb{R} \\ z = 1-5t \end{cases}$ représentation paramétrique de $\mathcal{D}$

1) B (7 ; -1 ; 4) appartient-il à $\mathcal{D}$

$$\begin{cases} 7 = 4+3t \\ -1 = -2+t \\ -4 = 1-5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{3} = 1 \\ t = 2-1 = 1 \\ t = \frac{-5}{-5} = 1 \end{cases}$$