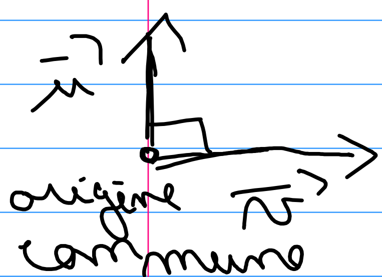
Séance du 28/05

Exercice 24 p. 314 :

$\vec{u}\begin{pmatrix} k \\ -2 \\ k-1 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ k \end{pmatrix}$



- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux ssi $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff 2k - 2k + k(k-1) = 0$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff k(k-1) = 0$

On applique la règle du produit nul

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \begin{cases} k = 0 \\ \text{ou} \\ k = 1 \end{cases}$

Les vecteurs sont orthogonaux pour $k = 0$ ou $k = 1$.

Exemple 3 :

$\mathcal{D}$ droite de r.p. $\begin{cases} x = 4+3t \\ y = -2+t \\ z = 1-5t \end{cases}$

1) $B(7;-1;-4)$ appartient à $\mathcal{D}$, il est paramétré par -1

2) $E(9;3;-2)$

$B(7;-1;-4)$

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est :

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

De plus $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{BE} = 3\times 2 + 1\times 4 + (-5)\times 2$

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{BE} = 10 - 10 = 0$

donc $\vec{u}$ orthogonale à $\overrightarrow{BE}$

donc $\mathcal{D}$ orthogonale à (BE).

$\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BF}\cdot\vec{u} = 4\times3+3-15=0$

$\overrightarrow{BF}$ est orthogonale à $\vec{u}$

donc (BF) est orthogonale à $\mathcal{D}$.

Rque : Dans l'espace deux droites orthogonales à une même troisième ne sont pas nécessairement parallèles

3) $\mathcal{D}'\begin{cases}x=5t\\y=5t\\z=4t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

$\vec{v}\begin{pmatrix}5\\5\\4\end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}'$

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 5\times3+5\times1-5\times4=0$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonaux

On détermine si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en résolvant le système :

$$\begin{cases} 4+3t=5k & L_1 \\ -2+t=5k & L_2 \\ 1-5t=4k & L_3 \end{cases}$$

r.p. de $\mathcal{D}$ r.p. de $\mathcal{D}'$

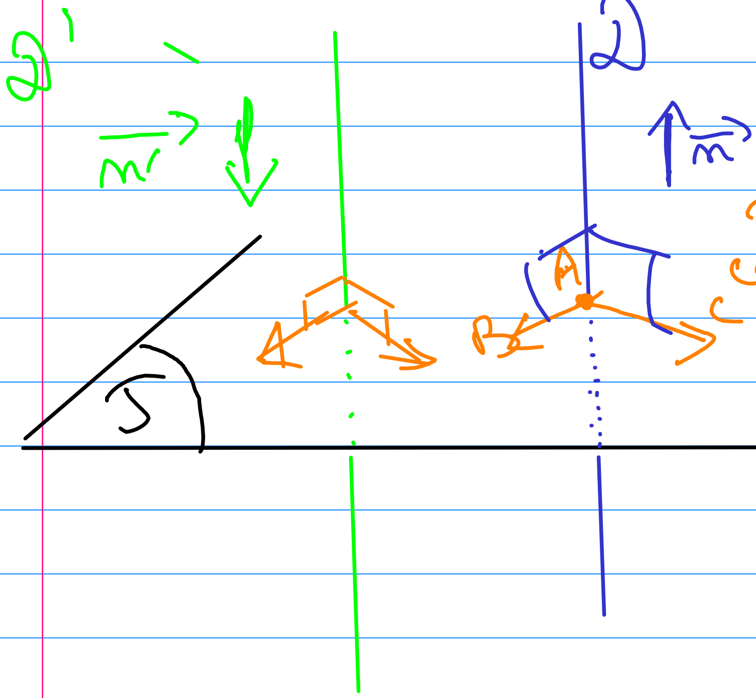
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+3t-(-2+t)=5k-5k & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ -2+t=5k & L_2 \\ 1-5t=4k & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6+2t=0 \\ L_2 \\ L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-3 \\ -2-3=5k \\ 1-5\times(-3)=4k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=-3 \\ k=-1 \\ k=\frac{16}{4}=4 \end{cases}$$

On a des équations incompatibles, donc le système n'a pas de solution, donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales et non sécantes. Elles sont non coplanaires.

Vecteur normal d'un plan



$\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{T}$ en A

non colinéaires $\begin{cases} \vec{u} = \vec{AB} \text{ avec } B \in \mathcal{T} \\ \vec{v} = \vec{AC} \text{ avec } C \in \mathcal{T} \end{cases}$

$\vec{n}$ dirige $\mathcal{D}$

$\mathcal{D} \perp \mathcal{T} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \text{et} \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$

Si $\mathcal{D}' \perp \mathcal{T}$ et $\mathcal{D} \perp \mathcal{T}$ alors $\mathcal{D}' // \mathcal{D}$

les vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$

sont colinéaires

Les vecteurs normaux à un plan sont colinéaires entre eux.

$\boxed{\text{Exercice 27 p. 315}}$

$A(-1\,;1\,;2)$ $B(1\,;0\,;-1)$ $C(0\,;3\,;1)$

1) Démontrons que A, B, C définissent un plan :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-(-1)\\3-1\\1-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires ssi il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} 2 = k \\ -1 = 2k \\ -3 = -k \end{cases} \iff \begin{cases} k = 2 \\ -1 = 4 \\ k = 3 \end{cases}$$

Les équations sont incompatibles, le système n'a pas de solution !

Les vecteurs ne sont pas colinéaires, les points A, B, C ne sont pas alignés et forment un plan.

2) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -14 - 1 + 15 = 0$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = -7 + 2 + 5 = 0$$

$\vec{AD}$ est orthogonal à $\vec{AB}$ et à $\vec{AC}$ donc c'est un vecteur normal au plan.

Exemple 4 : $A(2;0;1)$ $\vec{u}(1;1;1)$

1) $\mathcal{D}$ droite passant et de vecteur directeur $\vec{u}$

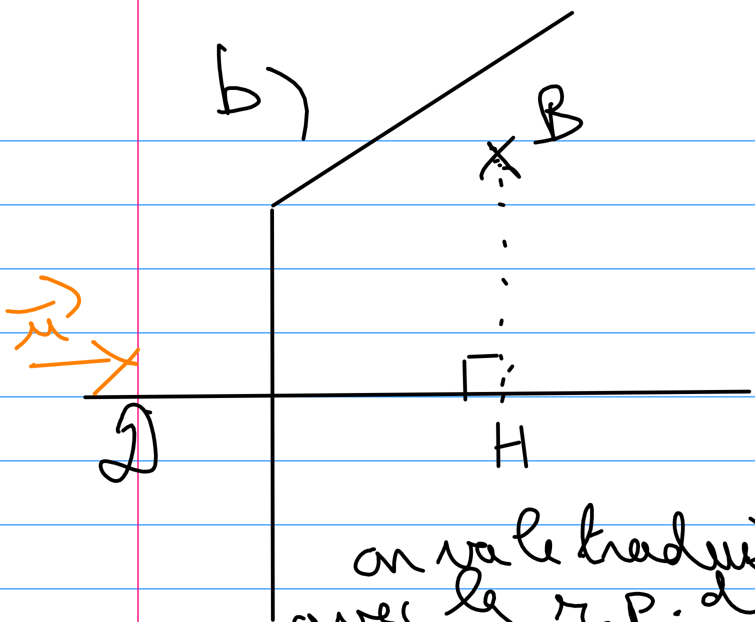
$$\mathcal{D}\begin{cases} x = \underset{\uparrow A}{2} + t \times \underset{\uparrow \vec{u}}{1} \\ y = 0 + t \times 1 \\ z = 1 + t \times 1 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

2) Soit $B(3;2;4)$

a) $$\begin{cases} 3 = 2 + t \\ 2 = t \\ 4 = 1 + t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \\ t = 3 \end{cases}$$

Les équations sont incompatibles donc B n'appartient à $\mathcal{D}$

b)



H projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$

ssi $\begin{cases} \text{H appartient à } \mathcal{D} \\ \text{et} \\ (BH) \perp \mathcal{D} \end{cases}$

on va le traduire avec la r.p. de $\mathcal{D}$

on va le traduire avec le produit scalaire entre $\vec{BH}$ et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$

- H appartient à $\mathcal{D}$ ssi il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $H\begin{pmatrix} 2+t \\ t \\ 1+t \end{pmatrix}$

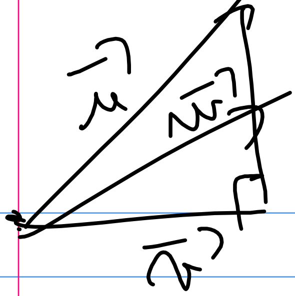
- $(BH) \perp \mathcal{D}$ ssi $\vec{BH} \cdot \vec{u} = 0$

Or on a $\vec{BH}\begin{pmatrix} 2+t-3 \\ t-2 \\ 1+t-4 \end{pmatrix}$ $\vec{BH}\begin{pmatrix} t-1 \\ t-2 \\ t-3 \end{pmatrix}$

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{BH} \cdot \vec{u} = 0 \iff t-1+t-2+t-3=0$

$\iff 3t-(1+2+3)=0$



$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{w}\cdot\vec{v}$$

$$\vec{BH}\cdot\vec{u} = 0 \iff 3t = 6 \iff t = 2$$

Le point H projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$ a donc pour coordonnées

$$H\begin{pmatrix}2+2\\2\\2+1\end{pmatrix} \qquad \boxed{H\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}}$$