Déterminer une équation de plan.

Méthodes 3 et 4 p.309

puis exercices 37 et 38 p.316

MÉTHODE 3 Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas particulier) ► Ex. 37 p. 316

Dans le cas où le plan $(\mathscr{P})$ est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

1) écrire l'équation de $(\mathscr{P})$ sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où le réel d reste à déterminer ;
2) déterminer d en utilisant les coordonnées du point A.

Exercice d'application Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par $A(1;-2;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Correction Les coordonnées du vecteur $\vec{n}$ étant données, le plan $(\mathscr{P})$ admet pour équation $4x - 2y + z + d = 0$, où d est un réel qu'il reste à déterminer. Le point A appartient à $(\mathscr{P})$ donc $4 \times 1 - 2 \times (-2) + 3 + d = 0$, ce qui donne $d = -11$.
Ainsi, une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est : $4x - 2y + z - 11 = 0$.

n°38 p.316 :

Déterminer une équation du plan passant par $A(1;4;-5)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Une équation de plan est de la forme $ax + by + cz + d = 0$

avec $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ coordonnées d'un vecteur normal.

Une équation est donc de la forme :

$2x - y + 3z + d = 0$

Pour déterminer d, on va utiliser le point $A(1;4;-5)$ qui appartient au plan $\mathcal{P}$

$A(1;4;-5) \in \mathcal{P} \iff 2 - 4 + 3 \times (-5) + d = 0$

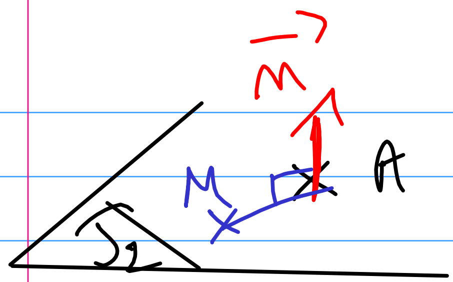
$\iff d = 17$

Une équation du plan est :

$$\boxed{2x - y + 3z + 17 = 0}$$

2) On considère désormais le plan $\mathcal{P}_2$ passant par $A(\sqrt{2}; 2; -3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

On pose $a = \sqrt{3}$ $b = -1$ $c = \sqrt{2}$



$M \in \mathcal{P}_2 \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

D'après une propriété du cours, une équation de $\mathcal{P}_2$ est :

$$\sqrt{3}\,x - y + \sqrt{2}\,z + d = 0$$

$$A(\sqrt{2}\,;2\,;-\sqrt{3}) \in \mathcal{P}_2 \iff \sqrt{6} - 2 - \sqrt{6} + d = 0$$

$$\iff d = 2$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Une équation de } \mathcal{P}_2 \text{ est donc :}\\ \sqrt{3}\,x - y + \sqrt{2}\,z + 2 = 0\end{array}}$$

Autre méthode (plus constructive) celle de la démonstration de la propriété du cours.

$$M(x\,;y\,;z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-\sqrt{2} \\ y-2 \\ z+\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \vec{n}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$M(x;y;z) \in \mathcal{P} \iff \sqrt{3}(x-\sqrt{2}) + (-1)\times(y-2) + \sqrt{2}\times(z+\sqrt{3}) = 0$$

$$\boxed{M(x;y;z) \in \mathcal{P} \iff \sqrt{3}x - y + \sqrt{2}z + 2 = 0}$$

Cours :

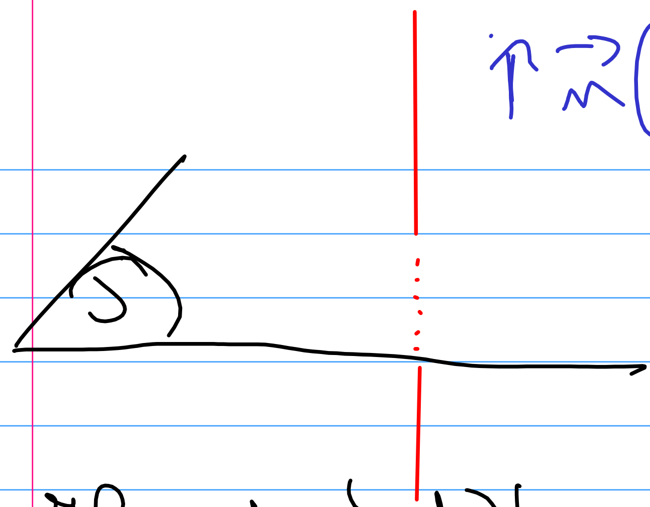
1) Soit le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y+3z+4=0$.

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est :

$x+y+3z+4=0$ est de la forme $ax+by+cz+d=0$

donc un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$.

Soit la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \quad \text{avec } t\in\mathbb{R} \\ z=1+3t \end{cases}$



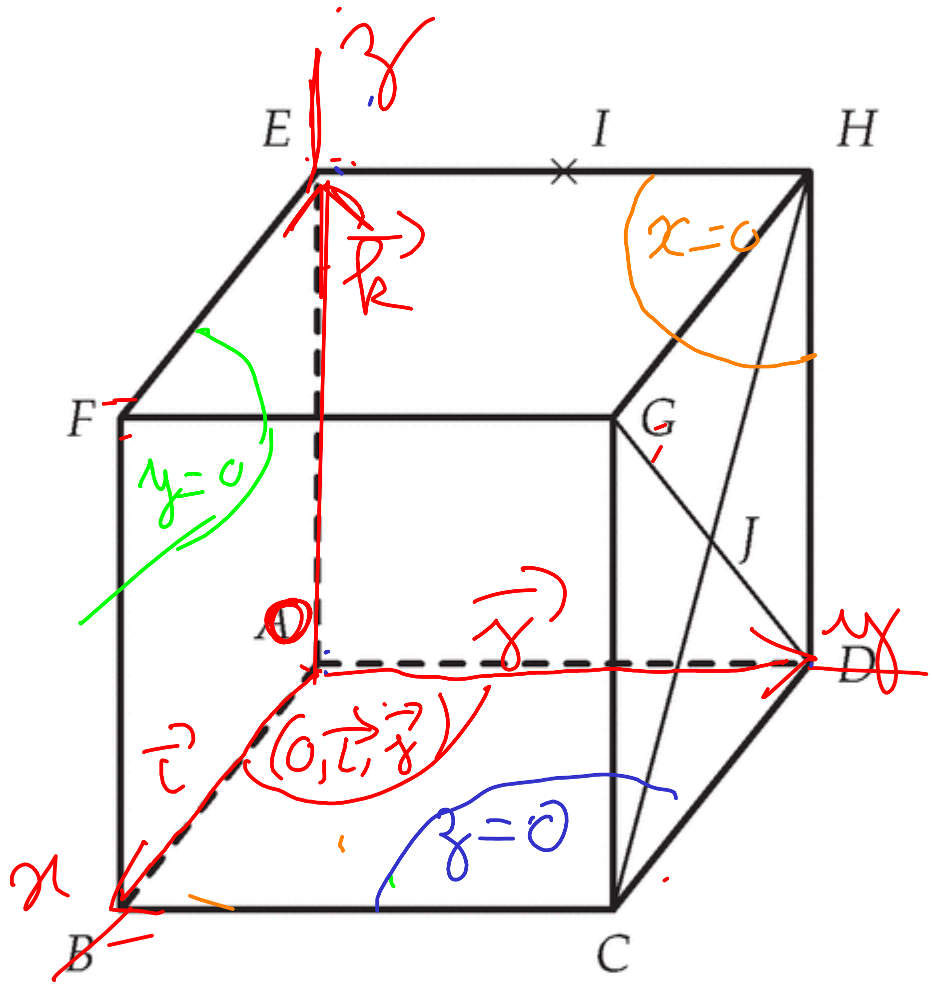
$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et normal au plan

donc $\mathcal{D}$ est perpendiculaire au plan

Il reste à déterminer si $\mathcal{D}$ passe par $S(1;-2;-2)$ en résolvant le système :

$$\begin{cases} 1 = 2+t \\ -2 = -1+t \\ -2 = 1+3t \end{cases} \iff \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$$

Le système admet une solution donc la droite $\mathcal{D}$ est bien la perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par S.



2) Le plan $(O, \vec{i}, \vec{j}) = (OBD)$

- pour vecteur normal $\vec{OE} = \vec{k}$

$$\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

- passe par $O(0;0;0)$
- pour équation :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$0 \times x + 0 \times y + 1 \times z + d = 0$$

$O(0;0;0) \in (OBD) \Leftrightarrow 1 \times 0 + d = 0$

$\Leftrightarrow d = 0$

$\boxed{\text{Une équation du plan } (O, \vec{i}, \vec{j}) \text{ est } z = 0}$

Rque : Le plan (EFH) parallèle à (OBD) a même vecteur normal $\vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et pour équation :

$z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$

. Le plan $(O, \vec{i}, \vec{k}) = (OBE)$ a pour vecteur normal $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$, il passe par l'origine donc il a pour équation :

$$\boxed{\underset{a}{0} \times x + \underset{b}{1} \times y + \underset{c}{0} \times z + \underset{d = 0}{0} = 0}$$

(passe par l'origine)

- Le plan $(O, \vec{j}, \vec{k}) = (OEH)$
a pour vecteur normal $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
et passe par l'origine
donc il a pour équation $\boxed{x = 0}$

3) $\mathcal{T}_1$ passe par $B(2;1;4)$
et de vecteur normal $\vec{n}(4;-3;1)$
Une équation de $\mathcal{T}_1$ est donc
de la forme :

$$4x - 3y + z + d = 0$$

De plus :

$$B(2;1;4) \in \mathcal{T}_1 \iff 4 \times 2 - 3 \times 1 + 4 + d = 0$$

$$\iff d = -9$$

$\mathcal{T}_1$ a donc pour équation :

$$\boxed{4x - 3y + z - 9 = 0}$$

4) $\mathcal{J}_2$ plan passant par $A(3;-1;4)$ et orthogonal à (BC)

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3-2\\-2-1\\0-4\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal donc une équation de $\mathcal{J}_2$ est de la forme :

$$x-3y-4z+d=0$$

Calculons d avec $A(3;-1;4)$

$$A(3;-1;4)\in\mathcal{J}_2 \iff 3-3\times(-1)-4\times4+d=0$$
$$\iff d=10$$

$$\boxed{\text{Une équation de } \mathcal{J}_2 \text{ est donc : } x-3y-4z+10=0.}$$

5) $\mathcal{P}_3$ passe par C et parallèle à $\mathcal{P}_2$, donc $\mathcal{P}_3$ admet les mêmes vecteurs normaux que $\mathcal{P}_2$

Une équation de $\mathcal{P}_3$ est donc :

$x - 3y - 4z + d = 0$

$C(3; -2; 0) \in \mathcal{P}_3 \iff 3 + 6 + d = 0$

$\iff d = -9$

$$\boxed{\text{Une équation de } \mathcal{P}_3 \text{ est donc : } \quad x - 3y - 4z - 9 = 0}$$