Produit scalaire dans l'espace

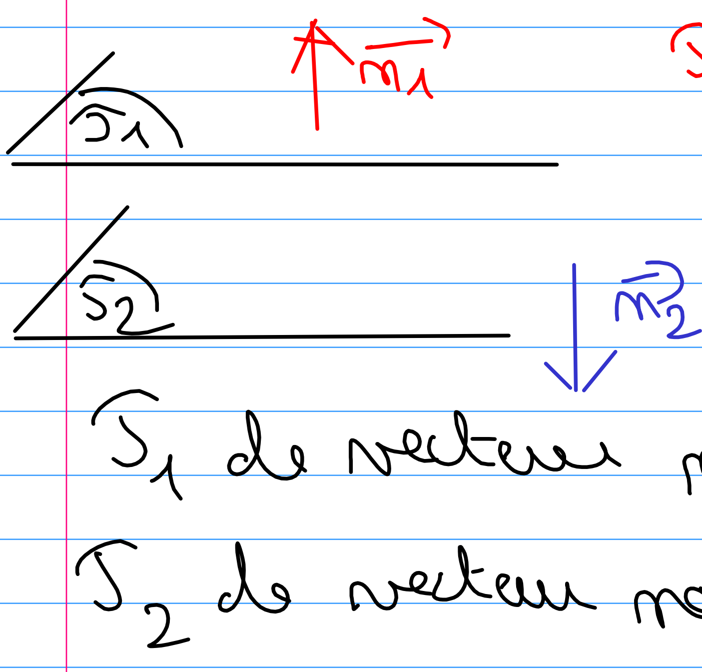
Exemple 9 :

Soit deux plans :

$\mathcal{P}_1$ d'équation $x+2y-z=-1$

$\mathcal{P}_2$ d'équation $3x+4y-2z+5=0$

1) Étudier la position relative des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, consiste à déterminer si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants ou parallèles



$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles ssi ils ont des vecteurs normaux colinéaires

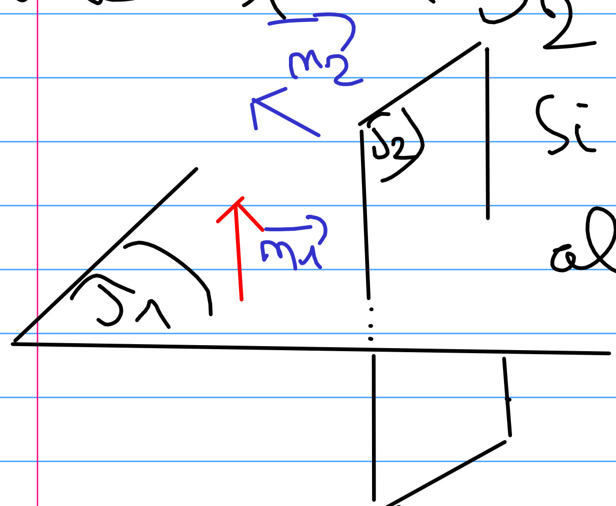
$\mathcal{P}_1$ de vecteur normal $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$\mathcal{P}_2$ de vecteur normal $\vec{n_2}\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$

$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ colinéaires ssi il existe k réel tel que $\vec{n_1} = k\,\vec{n_2}$

$$\vec{n_1} = k\,\vec{n_2} \iff \begin{cases} 1 = 3k \\ 2 = 4k \\ -1 = -2k \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{3} = k \\ \frac{1}{2} = k \\ \frac{1}{2} = k \end{cases}$$

$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires donc J_1 et J_2 sont sécants



Si J_1 et J_2 sont sécants, alors ils sont orthogonaux ssi $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$

$$\vec{n_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n_2}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 1 \times 3 + 2 \times 4 + 2 = 13$$

$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$ donc J_1 et J_2 ne sont pas orthogonaux.

2) On a montré que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathcal{D}$.

Cette droite est caractérisée par le système d'équations de plans

$$\mathcal{S}\begin{cases} x+2y-z=-1 \\ 3x+4y-2z+5=0 \end{cases}$$

On souhaite obtenir une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ et ainsi déterminer un vecteur directeur.

On transforme le système $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\cdot x+2\cdot y=-z-1 \\ 3x+4y+5=2z \end{cases}$$

système d'équations de droites

$1\times 4 \neq 3\times 2$ donc on peut exprimer x et y en fonction de z

$$\mathcal{S} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y+z-1 \quad (E1) \\ 3(-2y+z-1)+4y+5=2z \end{cases}$$

On exprime deux inconnues x et y en fonction de la 3ème z choisie comme paramètre

$$S \iff \begin{cases} (E_1) \\ -2y + 3z + 2 = 2z \end{cases}$$

$$S \iff \begin{cases} (E_1) \\ -2y = -z - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y + z - 1 \\ y = \frac{1}{2}z + 1 \end{cases}$$

$$S \iff \begin{cases} x = -2\left(\frac{1}{2}z + 1\right) + z - 1 \\ y = \frac{1}{2}z + 1 \end{cases}$$

$$S \iff \begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{1}{2}z + 1 \\ z = z \end{cases} \quad \text{avec } z \in \mathbb{R}$$

On fait renommage de z en t dans les membres de droite des égalités

$$S \iff \begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{1}{2}t + 1 \\ z = t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

- Les points de la droite $\mathcal{D}$ d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ont pour coordonnées :

$$\underbrace{\left(-3\ ;\ \frac{1}{2}t+1\ ;\ t\right)}_{\text{représentation paramétrique d'un point de } \mathcal{D}} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

Exercice 2 du DM n° 19

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :

- les points A, B, C, D et E de coordonnées respectives :
  A$(0\,;4\,;-1)$, B$(-2\,;4\,;-5)$, C$(1\,;1\,;-5)$, D$(1\,;0\,;-4)$, E$(-1\,;2\,;-3)$;
- la droite $\mathcal{D}$ définie par le système d'équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -3+k \\ y &=& k \\ z &=& -5+k \end{array}\right., \text{ avec } k \in \mathbb{R};$$

- le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation cartésienne : $x+2z+7=0$.

1) a) Coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n_1}$ au plan $\mathcal{P}_1$:

$$\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

b) I milieu de $[AB]$.

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_B}{2}\ ;\ \frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

$I(-1\,;\,4\,;\,-3)$

I appartient à $\mathcal{S}_1$ ssi $-1+2\times(-3)+7=0$

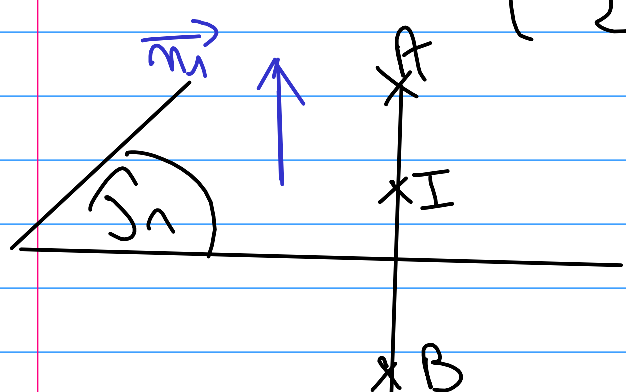
or $-1-6+7=0$.

donc I appartient au plan $\mathcal{S}_1$.

c) Montrons que (AB) est orthogonale à $\mathcal{S}_1$:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$

or $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{S}_1$



On a $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{n_1}$

donc (AB) orthogonale à $\mathcal{S}_1$

2) Soit $\mathcal{S}_2$ d'équation $x-y+d=0$

a) $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{S}_2$

b) $J\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{5}{2}\,;\,-5\right)$

$J \in \mathcal{S}_2$ ssi $-\frac{1}{2} - \frac{5}{2} + d = 0$

$J \in \mathcal{S}_2$ ssi $d = 3$

3) a) $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) K milieu de $[CD]$

$K\left(1 ; \frac{1}{2} ; -\frac{9}{2}\right)$

c) $\mathcal{S}_3$ passe par K et est orthogonal à (CD).

- Un vecteur normal à $\mathcal{S}_3$ est le vecteur $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Une équation de $\mathcal{S}_3$ est donc de la forme : $0x - y + z + d = 0$

- $K\left(1 ; \frac{1}{2} ; -\frac{9}{2}\right) \in \mathcal{S}_3 \iff -\frac{1}{2} - \frac{9}{2} + d = 0$

$\iff d = 5$

. Une équation de $\mathcal{P}_3$ est : $\boxed{-y+z+5=0}$

4) a) Justifions que $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants :

$\mathcal{P}_2$ de vecteur normal $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$\mathcal{P}_3$ de vecteur normal $\vec{n_3}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

Il n'existe pas de réel k tel que $\vec{n_2}=k\vec{n_3}$ donc $\vec{n_2}$ et $\vec{n_3}$ ne sont pas colinéaires.

On en déduit que $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants selon une droite.

Considérons la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique :

$$\mathcal{D}\begin{cases}x=-3+k\\y=k\\z=-5+k\end{cases} \quad \text{avec } k\in\mathbb{R}$$

- Un point $\mathcal{D}$ de la droite a des coordonnées de la forme $(-3+k\,;\,k\,;\,-5+k)$ avec $k \in \mathbb{R}$
- Une équation de $\mathcal{S}_2$ est $x-y+3=0$

Pour tout réel k :

$$\underbrace{-3+\cancel{k}}_{x} - \underbrace{\cancel{k}}_{y} + 3 = 0$$

- Les coordonnées d'un point quelconque de $\mathcal{D}$ vérifient l'équation de $\mathcal{S}_2$ donc $\mathcal{D}$ incluse dans $\mathcal{S}_2$

- De même on montre que $\mathcal{D}$ incluse dans $\mathcal{S}_3$ car pour tout réel k :

$$-k+(-5+k)+5=0$$

- La droite $\mathcal{D}$ appartient à $\mathcal{S}_2$ et à $\mathcal{S}_3$ donc c'est leur droite d'intersection.

b) Montrons que $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{T}_1$ au point E :

- soit on vérifie que les coordonnées de E satisfont la représentation de $\mathcal{D}$ et l'équation de $\mathcal{T}_1$.

- Soit on résout le système :

$$\begin{cases} x = -3+k \\ y = k \\ z = -5+k \\ x+2z+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3+k \\ y = k \\ z = -5+k \\ -3+k+2(-5+k)+7=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -3 \\ k = 2 \end{cases}$$

on retrouve les coordonnées de E qui est donc à l'intersection de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{D}$.