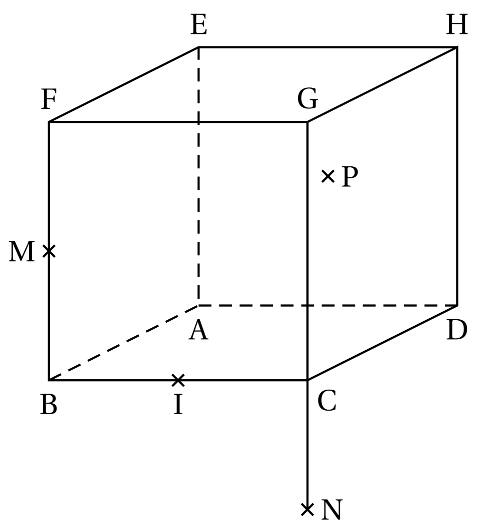
Exercice 1

On considère un cube ABCDEFGH.
Le point M est le milieu de [BF], I est le milieu de [BC], le point N est défini par la relation $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$ et le point P est le centre de la face ADHE.

1. Justifier que la droite (MN) coupe le segment [BC] en son milieu I.

2. Construire, sur la figure ci-dessous, la section du cube par le plan (MNP).



Exercice 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,,\ \vec{k}\right)$, on considère :

- les points A, B, C, D et E de coordonnées respectives :
  $\mathrm{A}\left(0\,;\,4\,;\,-1\right)$, $\mathrm{B}\left(-2\,;\,4\,;\,-5\right)$, $\mathrm{C}\left(1\,;\,1\,;\,-5\right)$, $\mathrm{D}\left(1\,;\,0\,;\,-4\right)$, $\mathrm{E}\left(-1\,;\,2\,;\,-3\right)$;
- la droite $\mathscr{D}$ définie par le système d'équations paramétriques :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -3+k \\ y &=& \phantom{-3+{}}k \\ z &=& -5+k \end{array}\right.,\ \text{avec } k\in\mathbb{R} ;$$
- le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation cartésienne : $x+2z+7=0$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$ au plan $\mathscr{P}_1$.

b. Soit I le milieu du segment [AB]. Montrer que I appartient au plan $\mathscr{P}_1$.

c. Montrer que la droite (AB) est orthogonale au plan $\mathscr{P}_1$.

2. Soit $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation cartésienne : $x-y+d=0$, où d désigne un réel.

a. Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$ au plan $\mathscr{P}_2$.

b. Soit J le point de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{5}{2}\,;\,-5\right)$.
Déterminer d pour que J appartienne au plan $\mathscr{P}_2$. Justifier la réponse.

3. **a.** Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$.

b. Calculer les coordonnées du milieu K du segment [CD].

c. Soit $\mathscr{P}_3$ le plan passant par K et orthogonal à la droite (CD).
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_3$. Justifier la réponse.

4. Le but de cette question est de prouver que les plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ ont comme seul point commun, le point E.

a. Justifier que les plans $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont sécants et que leur droite d'intersection est la droite $\mathscr{D}$.

b. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ coupe le plan $\mathscr{P}_1$ au point E.

5. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{EA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$.

6. Donner les distances EA, EB, EC et ED. Détailler le calcul pour ED.

7. En déduire que A, B, C et D appartiennent à une sphère $\mathscr{S}$ dont on précisera le centre et le rayon R. Justifier la réponse.

8. Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$.