1 Suites et récurrence

Méthode

- ☞ Démontrer par récurrence une propriété : **Méthode 1 page 14** ;
- ☞ Utiliser les théorèmes de comparaison et des gendarmes : **Méthode 6 page 23** ;
- ☞ Utiliser le théorème de convergence : **Méthode 7 page 24**.

Exercice 1

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 3$, $u_n \geqslant 0$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant n-2$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 *Centres étrangers juin 2017*

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose d'un médicament par voie intraveineuse.
Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de 20 μg.L^{-1}.
On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n-ième injection.
Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0,5u_n + 20$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
3. On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse 38 μg.L-$^{-1}$.
   Déterminer le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.

2 Nombres Complexes et trigonométrie

Méthode

- ☞ Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$: **Méthode 4 page 239** ;
- ☞ Déterminer le module et un argument d'un nombre complexe : **Méthode 6 page 240** ;
- ☞ Déterminer un ensemble de points : **Méthode 8 page 244** ;
- ☞ Calculer une distance, démontrer que des points sont alignés ⇒ *exercice 19 page 249 et exercice 70 page 254* ;
- ☞ Utilisation de la forme exponentielle : **Méthode 10 page 247**.

Exercice 3 *Différentes formes d'un nombre complexe*

1. Écrire sous forme exponentielle puis algébrique le nombre complexe z_1 de module 4 et d'argument $-\frac{\pi}{6}$.
2. Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $z_2 = -\sqrt{5} + \mathrm{i}\sqrt{5}$.
3. Déterminer les formes exponentielles et algébriques du nombre complexe $Z = \frac{z_2}{z_1}$.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 4 *Géométrie et nombres complexes*

Les questions sont toutes indépendantes.
On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble des points P du plan complexe dont l'affixe z vérifie $|z-1+2\mathrm{i}| = 3$.
2. Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

   a. Soit (E) l'équation d'inconnue le nombre complexe z

   $$z\left(z^2 - 8z + 32\right) = 0.$$

   Affirmation 1 : Les points dont les affixes sont les solutions de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle d'aire égale à 16 unités d'aire.

   b. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points dont les affixes z vérifient

   $$|z-3| = |z+3|.$$

   Affirmation 2 : L'ensemble $\mathscr{E}$ est le cercle de centre O et de rayon 3.

3 Dérivation et TVI

Méthode

☞ Exploiter le théorème des valeurs intermédiaires : **Méthode 4 page 63** ⇒ *exercices 45 et 46 page 69.*

Exercice 5 *QCM*

1. Soit f une fonction continue sur $[-3\,;+\infty[$ telle que $f(-3) = 4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

   Dans un repère, la courbe de f coupe l'axe des abscisses en :

   - un point
   - aucun point
   - on ne peut pas savoir
   - deux points

2. Si l'équation $x^3 - 3x^2 = k$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$ alors k peut être :

- égal à -1
- égal à 0
- égal à -4
- égal à 10

3. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont on connaît le tableau de variations.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↘	-2	↗	-1

Soit F une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la fonction dérivée est f. F est :

- négative sur $[-2\,;\,3]$
- décroissante sur $]-\infty\,;\,-2]$
- décroissante sur $[-2\,;\,+\infty[$
- positive sur $[3\,;\,+\infty[$

Exercice 6

On considère une fonction f dont on donne le tableau de variations ci-dessous.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormal du plan.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f(x)$	-1	↘	-2	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↘	-1

1. Déterminer les équations des asymptotes à $\mathscr{C}_f$.

2. On admet que pour tout réel $x \neq 1$ on a :

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

a. Démontrer que $a = -1$.

b. Calculer les valeur de b et c en résolvant un système d'équations.

3. On admet que pour tout réel $x \neq 1$ on a :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 2}{(x-1)^2}$$

Retrouver par le calcul la limite de la fonction f en 1.

4 Probabilités conditionnelles et loi binomiale

Exercice 7 *Un classique, Métropole juin 2014*

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est 0,99;

- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est $0,001$.

1. Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 %. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.

On note M l'évènement « la personne choisie est malade » et T l'évènement « le test est positif ».

a. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.

b. Démontrer que la probabilité $p(T)$ de l'évènement T est égale à $1,989 \times 10^{-3}$.

c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à $0,95$. On désigne par x la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population.

À partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?

Exercice 8 *Loi binomiale*

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive.

Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.

On arrondira les résultats à 10^{-3} *près.*

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.

1. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite ?

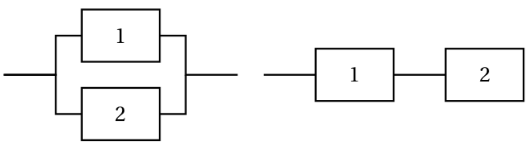
2. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite ?

Exercice 9 *Indépendance en probabilité*

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».

On suppose que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants et que $\mathbb{P}(D_1) = \mathbb{P}(D_2) = 0,39$.

Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-contre :



Circuit en parallèle A Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.

2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

5 Logarithme et exponentielle

Méthode

- ☞ Propriétés algébriques de l'exponentielle ⇒ *exercices 8, 9 et 11 page 124*;
- ☞ Propriétés algébriques du logarithme ⇒ *exercices 2 et 3 page 157*;
- ☞ Résoudre une équation ou une inéquation avec des exponentielles : **Méthode 1 page 122** ⇒ *exercices 13 et 15 page 125, exercice 5 page 157*;
- ☞ Déterminer une limite de fonction avec exponentielles : **Méthode 2 page 123** ⇒ *exercices 19 et 20 page 125*;
- ☞ Déterminer un ensemble de points : **Méthode 8 page 244**;
- ☞ Résoudre une inéquation avec ln : **Méthode 2 page 152** ⇒ *exercice 6 page 157, exercices 27 et 28 page 158*;;
- ☞ Résoudre une inéquation avec une inconnue à l'exposant : **Méthode 3 page 153** ⇒ *exercices 33 et 34 page 158*;

Exercice 10

Les questions sont indépendantes.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
   - $2e^{-x+5} - 2 = 0$
   - $e^{2x} + 3e^{x} - 4 = 0$
2. Dans une pièce à température constante de 20 degrés Celsius, Pauline se prépare une tasse de thé.
   A l'instant initial $t = 0$, la température de son thé est de 100 degrés Celsius.
   Quatre minutes plus tard, elle est de 80 degrés Celsius.
   On admet que la température en degrés Celsius du thé à l'instant t est donnée par :
   $$\Theta(t) = Ce^{at} + 20$$
   où t est le temps en minutes et C et a sont des constantes réelles.
   Au-dessus de 40 degrés Celsius, Pauline trouve que le thé est trop chaud et ne peut pas le boire.
   Combien de minutes devra-t-elle attendre pour déguster son thé ? La réponse doit être justifiée.

Exercice 11

Lors d'un sondage réalisé par téléphone, la probabilité que la personne appelée accepte de répondre au sondage est de $0,4$.

Déterminer le nombre minimal de personnes qu'il faut appeler pour que la probabilité d'avoir au moins une réponse au sondage soit supérieure à $0,95$.

Exercice 12

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x(1 - \ln(x))$.

1. Déterminer la limite de g en 0 et en $+\infty$.
2. Exprimer $g'(x)$ en fonction de x et en déduire les variations de g.

Exercice 13

On considère la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3 - \mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Soit x un réel, déterminer $f'(x)$.
2. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a :
   $$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$$
   b. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.

Exercice 14

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

1. **Proposition 1**
   On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation :
   $$\ln(6x-2) + \ln(2x-1) = \ln(x).$$
   L'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.
2. g est la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ par
   $$g(x) = 2x\ln(2x+1).$$
   Proposition 2
   Sur $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\frac{\mathrm{e}-1}{2}$.
   Proposition 3
   Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est : $1 + \ln 4$.

Exercice 15

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x}.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x}$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.