# 1 Sujet 1

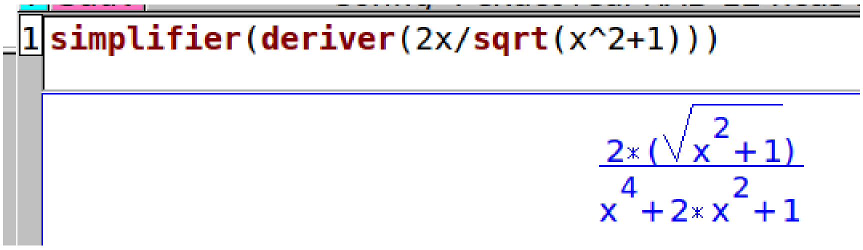
**Exercice 1**

Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0=0,5$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. $f$ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ d'après les théorèmes usuels. Voici l'expression de $f'(x)$ obtenue avec le logiciel de calcul formel français Xcas [1].




   Utiliser ce résultat pour dresser le tableau de variation de $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$ et en déduire que si $0<x<2$, alors

$$0<f(x)<2$$

2. Démontrer que pour tout entier naturel $n$ on a

$$0<u_n<u_{n+1}<2$$

3. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et déterminer un encadrement de sa limite $\ell$.

**Exercice 2**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}}=-\text{i}\,;\ z_{\text{B}}=3\,;\ z_{\text{C}}=2+3\text{i}\quad\text{et}\quad z_{\text{D}}=-1+2\text{i}.$$

1. Placer sur une figure les points A, B, C et D.
2. Simplifier l'écriture algébrique du complexe $Z=\dfrac{z_{\text{C}}-z_{\text{A}}}{z_{\text{D}}-z_{\text{B}}}$.
3. Déterminer un module et un argument de $Z$.
   Que peut-on en déduire géométriquement pour les droites (AC) et (BD) et pour les longueurs AC et BD ?
4. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier.

1. http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html

## 2 Sujet 2

**Exercice 1**

La chaîne de production du laboratoire fabrique, en très grande quantité, le comprimé d'un médicament.

Un comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 890 et 920 mg. On admet que la masse en milligrammes d'un comprimé pris au hasard dans la production peut être modélisée par une variable aléatoire $X$ qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, de moyenne $\mu = 900$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

**1.** Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme. On arrondira à $10^{-2}$.

**2.** Déterminer l'entier positif $h$ tel que $P(900 - h \leqslant X \leqslant 900 + h) \approx 0,99$ à $10^{-3}$ près.

**Exercice 2**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2$.
On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N},\ v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}$.

**1.** Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

**2.** Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

**3.** En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{21}{4}$.

**4.** En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice 3**

Calculer les valeurs exactes des intégrales suivantes :

- $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
- $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$

# 3 Sujet 3

## Exercice 1

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

1. On dispose de deux dés, identiques d'aspect, dont l'un est truqué de sorte que le 6 apparait avec la probabilité $\frac{1}{2}$. On prend un des deux dés au hasard, on le lance, et on obtient 6.

   **Affirmation 1** : la probabilité que le dé lancé soit le dé truqué est égale à $\frac{2}{3}$.

2. Dans le plan complexe, on considère les points M et N d'affixes respectives $z_{\text{M}} = 2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et $z_{\text{N}} = \frac{3-\text{i}}{2+\text{i}}$.

   **Affirmation 2** : la droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées.

Dans les questions **3.** et **4.**, on se place dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace et l'on considère la droite $d$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+t \\ y & = & 2, \\ z & = & 3+2t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$

3. On considère les points A, B et C avec A$(-2 ; 2 ; 3)$, B $(0 ; 1 ; 2)$ et C$(4 ; 2 ; 0)$.

   On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   **Affirmation 3** : la droite $d$ est orthogonale au plan (ABC).

4. On considère la droite $\Delta$ passant par le point D$(1 ; 4 ; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\,(2 ; 1 ; 3)$.

   **Affirmation 4** : la droite $d$ et la droite $\Delta$ ne sont pas coplanaires.

## Exercice 2

Soient $u$ et $v$ deux fonctions dont on donne les tableaux de variations ci-dessous :

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $6$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $v(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $2$ |

En justifiant, déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} v(u(x))$
2. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} u(v(x))$
3. $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} u(v(x))$

# 4 Sujet 4

**Exercice 1**

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - 2 \end{cases}$.

1. Avec la calculatrice calculer les dix premiers termes de cette suite et conjecturer son comportement asymptotique.
2. Démontrer par récurrence que la suite est minorée par $-3$
3. Démontrer que la suite est décroissante.
4. Conclure sur la convergence de $(u_n)$ et déterminer sa limite.

**Exercice 2**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 1 - \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{B}} = 2 + \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

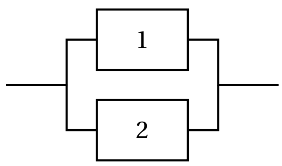
1. Déterminer le module et un argument de $z_{\mathrm{A}}$.
2. **a.** Écrire $\dfrac{z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}}}$ sous forme algébrique.

   **b.** Montrer que $\dfrac{z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}}} = \left(1 + \sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

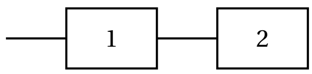
   **c.** En déduire la forme exponentielle de $z_{\mathrm{B}}$.

**Exercice 3**

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note $D_1$ l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note $D_2$ l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les deux événements $D_1$ et $D_2$ sont indépendants et que $\mathbb{P}\left(D_1\right) = \mathbb{P}\left(D_2\right) = 0,39$.
Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-contre :



Circuit en parallèle A



Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

# 5 Sujet 5

**Exercice 1**

Etudier les limites en $-\infty$ et $+\infty$ et les variations de la fonction :

$$f : x \mapsto x^2 \mathrm{e}^{-x}$$

**Exercice 2**

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut $a$ et le défaut $b$. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

Les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.

On prélève un sac au hasard dans la production d'une journée.

On note $A$ l' évènement « le sac présente le défaut $a$ » et $B$ l'évènement « le sac présente le défaut $b$ ». Les probabilités des évènements $A$ et $B$ sont respectivement $P(A) = 0,02$ et $P(B) = 0,01$ ; **on suppose que ces deux évènements sont indépendants**.

1. Calculer la probabilité de l'évènement C « le sac prélevé présente le défaut $a$ et le défaut $b$ ».
2. Calculer la probabilité de l'évènement D « le sac est défectueux ».
3. Calculer la probabilité de l'évènement E « le sac ne présente aucun défaut ».
4. Sachant que le sac présente le défaut $a$, quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut $b$ ?

**Exercice 3**

On considère l'équation

$$(E) : \qquad z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$$

ayant pour inconnue le nombre complexe $z$.

1. Donner une solution entière de $(E)$.
2. Démontrer que, pour tout nombre complexe $z$,

$$z^4 + 2z^3 - z - 2 = \left(z^2 + z - 2\right)\left(z^2 + z + 1\right).$$

3. Résoudre l'équation $(E)$ dans l'ensemble des nombres complexes.

# 6 Sujet 6

## Exercice 1

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi normale $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Soient $c$ et $q$ deux réels tel que $\mathbb{P}(X \leqslant -c) = q$ et $c \geqslant 0$.

En justifiant, exprimer en fonction de $q$, les probabilités :

- $\mathbb{P}(X > c)$
- $\mathbb{P}(-c < X < c)$
- $\mathbb{P}(-c < X < 0)$
- $\mathbb{P}(-c \leqslant X \leqslant 3)$

## Exercice 2

On considère la fonction :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{634}{x} \end{array}$$

$g$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

Déterminer les abscisses des points de la courbe représentant la fonction $g$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -634x + 731$.

## Exercice 3

On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 & \text{et, pour tout entier naturel } n, \\ u_{n+1} = \left(\dfrac{n+1}{2n+4}\right)u_n. \end{cases}$$

On définit la suite $(v_n)$ par : pour tout entier naturel $n$, $v_n = (n+1)u_n$.

1. La feuille de calcul ci-contre présente les valeurs des premiers termes des suites $(u_n)$ et $(v_n)$, arrondies au cent-millième.

   Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de $(u_n)$ ?

2. **a.** Conjecturer l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.

   **b.** Démontrer cette conjecture.

3. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ .

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | $n$ | $u_n$ | $v_n$ |
| 2 | 0 | 1,000 00 | 1,000 00 |
| 3 | 1 | 0,25000 | 0,500 00 |
| 4 | 2 | 0,083 33 | 0,250 00 |
| 5 | 3 | 0,031 25 | 0,125 00 |
| 6 | 4 | 0,012 50 | 0,062 50 |
| 7 | 5 | 0,005 21 | 0,031 25 |
| 8 | 6 | 0,002 23 | 0,015 63 |
| 9 | 7 | 0,000 98 | 0,007 81 |
| 10 | 8 | 0,000 43 | 0,003 91 |
| 11 | 9 | 0,000 20 | 0,001 95 |

# 7 Sujet 7

## Exercice 1

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi normale $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
En explicitant la démarche, calculer avec une machine des valeurs approchées à $10^{-4}$ près des probabilités :

1. $\mathbb{P}(-3 < X < 3)$
2. $\mathbb{P}(X \leqslant 1,5)$
3. $\mathbb{P}(X \leqslant -0,5)$
4. $\mathbb{P}(X > -2,5)$

## Exercice 2

On considère deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ :

- la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$ ;
- la suite $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par $v_n = 2^n$.

**Partie A : Conjectures**

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | rang $n$ | terme $u_n$ | terme $v_n$ |
| 2 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 5 | 2 |
| 4 | 2 | 12 | 4 |
| 5 | 3 | 25 | 8 |
| 6 | 4 | 50 | 16 |

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?
2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | 10 | 3 080 | 1 024 |
| 13 | 11 | 6 153 | 2 048 |
| 14 | 12 | 12 298 | 4 096 |
| 15 | 13 | 24 587 | 8 192 |

Conjecturer les limites des suites $(u_n)$ et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

**Partie B : Étude de la suite $(u_n)$**

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.
2. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.
3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

# 8 Sujet 8

**Exercice 1**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;\,1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1}$$

1. **a.** Etudier le sens de variation de la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^3 - 3x - 3$$

   **b.** Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   Donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0,01.

   **c.** Préciser le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\,;\,1\}$ on a :

$$f'(x) = g(x) \times \frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

   **b.** Déduire alors de la question **1.** l'étude des variations de la fonction $f$.

**Exercice 2**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère les points A$(-2\ ;\ 0\ ;\ 1)$, B$(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et C$(-2\ ;\ 2\ ;\ 2)$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}}$ puis les longueurs AB et AC.
2. En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$.
3. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
4. Justifier que le vecteur $\vec{n}\,(-2\,;1\,;-2)$ est normal au plan $(ABC)$ et en déduire une équation de ce plan.

# 9 Sujet 9

**Exercice 1**

1. Soit $z$ un nombre complexe non nul, exprimer en fonction de $\arg(z)$ les arguments suivants :

   **a.** $\arg(2z)$ | **b.** $\arg(\mathrm{i}z)$ | **c.** $\arg(-2\mathrm{i}z)$ | **d.** $\arg(-3z)$

2. Soient les nombres complexes $z_1 = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = \dfrac{1}{2}(1-\mathrm{i})$. On pose $Z = z_1 z_2$.

   **a.** Ecrire $z_1$ et $z_2$ sous forme trigonométrique.

   **b.** Ecrire $Z$ sous forme algébrique puis en déduire son écriture trigonométrique.
   En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

**Exercice 2**

Question préliminaire
Soit $T$ une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, où $\lambda$ désigne un réel strictement positif.
On rappelle que, pour tout réel $a$ positif, on a : $P(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.
Démontrer que, pour tout réel $a$ positif, $P(T > a) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère des lampes à led dont la durée de vie, exprimée en jour, est modélisée par une variable aléatoire $T$ suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{2\,800}$.

*Les durées seront données au jour près, et les probabilités au millième près*

**Partie A : étude d'un exemple**

1. Calculer la probabilité qu'une lampe fonctionne au moins 180 jours.
2. Sachant qu'une telle lampe a déjà fonctionné 180 jours, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore au moins 180 jours ?

**Partie B : contrôle de la durée de vie moyenne**

Le fabricant de ces lampes affirme que, dans sa production, la proportion de lampes qui ont une durée de vie supérieure à 180 heures est de 94 %.

Un laboratoire indépendant qui doit vérifier cette affirmation fait fonctionner un échantillon aléatoire de 400 lampes pendant 180 jours.

On suppose que les lampes tombent en panne indépendamment les unes des autres.
Au bout de ces 180 jours, 32 de ces lampes sont en panne.
Au vu des résultats des tests, peut-on remettre en cause, au seuil de 95 %, la proportion annoncée par le fabricant ?

# 10 Sujet 10

## Exercice 1

*Dans cet exercice, les questions 1. et 2. sont indépendantes.*

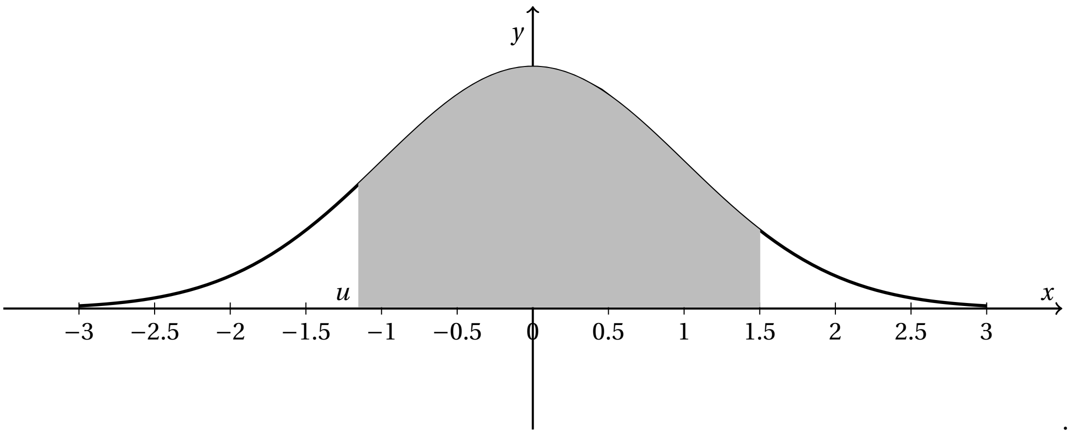
**1.** Dans cette question, on considère une variable aléatoire réelle $X$ suivant la loi normale $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

**a.** Soit $q$ un réel compris entre 0 et 1 et $c$ un réel positif tel que $\mathbb{P}(X \geqslant c) = q$. A l'aide des propriétés des symétrie de la fonction de densité d'une loi normale centrée réduite, exprimer en fonction de $q$ les probabilités suivantes :

- $\mathbb{P}(X \leqslant -c)$
- $\mathbb{P}(-c \leqslant X \leqslant c)$

**b.** Déterminer une valeur approchée à $10^{-3}$ près de $\mathbb{P}(-1,5 \leqslant X \leqslant 1,5)$.

**c.** On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction de densité de $X$. En détaillant la démarche employée, déterminer une valeur approchée à $10^{-2}$ près du réel $u$ tel que l'aire colorée soit égale à $0,808$.




**2.** Soit $Y$ une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2)$ d'espérance $\mu = 733$ et d'écart-type $\sigma$. De plus, on a $P(Y \leqslant 721) = 0,12$.

**a.** Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y - 733}{\sigma}$ ?

**b.** Justifier que $\mathbb{P}(Y \leqslant 721) = \mathbb{P}\left(Z \leqslant \dfrac{-12}{\sigma}\right)$.

**c.** En déduire la valeur de $\sigma$, arrondie à $10^{-1}$ près.

## Exercice 2

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

**1. Proposition 1**

Toute suite positive croissante tend vers $+\infty$.

**2.** $g$ est la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par

$$g(x) = 2x\ln(2x+1).$$

**Proposition 2**

Sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$.

**Proposition 3**

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction $g$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est : $1 + \ln 4$.

# 11 Sujet 11

## Exercice 1

1. Démontrer que la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F : x \mapsto x\ln x - x + 1$ est une primitive de la fonction ln.
Déterminer la primitive de la fonction ln qui s'annule en $\sqrt{\mathrm{e}}$.

2. Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[1\,;5]$, on donne :

$$I = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = -3 \qquad J = \int_5^2 f(x)\mathrm{d}x = 2 \qquad K = \int_1^5 g(x)\mathrm{d}x = 12$$

Calculer $L = \displaystyle\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$, $M = \displaystyle\int_1^5 (f(x)+g(x))\mathrm{d}x$ puis $N = \displaystyle\int_1^5 (2f(x)-3g(x))\mathrm{d}x$

## Exercice 2

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$ ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$ ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel $n$ non nul :

- $\mathrm{G}_n$ l'évènement « le joueur gagne la $n$-ième partie » ;
- $p_n$ la probabilité de l'évènement $\mathrm{G}_n$.

On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.
5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ non nul,
$p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.
6. Déterminer la limite de la suite $(p_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

# 12 Sujet 12

## Exercice 1

La durée d'attente, en minutes, au départ d'une remontée mécanique dans une station de sports d'hiver est une variable aléatoire $T$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,05$.

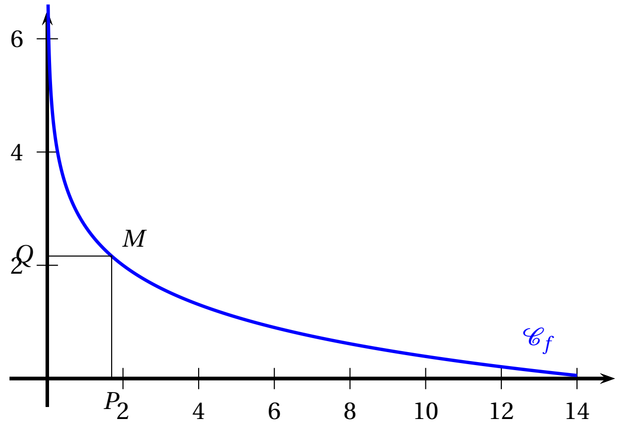
1. Calculer, en minutes, le temps moyen d'attente au départ de cette remontée mécanique.
2. Calculer à $10^{-2}$ près, la probabilité d'attendre au départ de cette remontée mécanique :
   - moins de 15 minutes ;
   - entre 15 et 20 minutes.
3. Un skieur arrive à la remontée mécanique. Un panneau indique que le temps d'attente est d'au moins 10 minutes. Calculer à $10^{-2}$ près, la probabilité qu'il soit supérieur à 30 minutes.

## Exercice 2

Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;\,14]$ par

$$f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f$ est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-contre.




À tout point $M$ appartenant à $\mathscr{C}_f$ on associe le point $P$ projeté orthogonal de $M$ sur l'axe des abscisses, et le point $Q$ projeté orthogonal de $M$ sur l'axe des ordonnées.

- L'aire du rectangle O$PMQ$ est-elle constante quelle que soit la position du point $M$ sur $\mathscr{C}_f$ ?
- L'aire du rectangle O$PMQ$ peut-elle être maximale ?

  Si oui, préciser les coordonnées du point $M$ correspondant.

## Exercice 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, soient $A\,(3\,;\,-1\,;\,4)$, $B\,(2\,;\,1\,;\,4)$ et $C\,(3\,;\,-2\,;\,0)$.

1. Déterminer une équation de chacun des trois plans de base de repères respectifs $\left(O\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, $\left(O\,;\,\vec{\imath}, \vec{k}\right)$, $\left(O\,;\,\vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_1$ passant par $B$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(4\,;\,-3\,;\,1)$.
3. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$ passant par $A$ et orthogonal à la droite $(BC)$.

# 13 Sujet 13

**Exercice 1**

Un volume constant de 2 000 m$^3$ d'eau est réparti entre deux bassins U et V.

Le bassin U refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.

On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin U contient 500 m$^3$ d'eau et le bassin V contient 1 500 m$^3$ d'eau ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin U au début de la journée est transféré vers le bassin V ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin V au début de la journée est transféré vers le bassin U.

Pour tout entier naturel $n$, on note :

- $u_n$ le volume d'eau, exprimé en m$^3$, contenu dans le bassin U à la fin du $n$-ième jour de fonctionnement ;
- $v_n$ le volume d'eau, exprimé en m$^3$, contenu dans le bassin V à la fin du $n$-ième jour de fonctionnement.

On a donc $u_0 = 500$ et $v_0 = 1\,500$.

1. Par quelle relation entre $u_n$ et $v_n$ traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?
2. Justifier que, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 300$.
3. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

   Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B3 et C3 qui, recopiées vers le bas, permettent d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous ?

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | $n$ | $u$ | $v$ |
| 2 | 0 | 500 | 1500 |
| 3 | 1 | 675 | 1325 |
| 4 | 2 | 806,25 | 1193,75 |
| 5 | 3 | 904,69 | 1095,31 |
| 6 | 4 | 978,52 | 1021,48 |
| 7 | 5 | 1033,89 | 966,11 |
| 8 | 6 | 1106,56 | 893,44 |

4. On considère l'algorithme ci-dessous

| | | |
|---|---|---|
| **Variables** | : | $n$ est un entier naturel |
| | | $u$ est un réel |
| **Initialisation** | : | Affecter à $n$ la valeur 0 |
| | | Affecter à $u$ la valeur 500 |
| **Traitement** | : | Tant que $u < 2\,000 - u$, faire : |
| | | Affecter à $u$ la valeur $0,75 \times u + 300$ |
| | | Affecter à $n$ la valeur $n+1$ |
| | | Fin Tant que |
| **Sortie** | : | Afficher $n$ |

   **a.** Que fait cet algorithme ?

   **b.** Quelle valeur affiche-t-il en sortie ?

**Exercice 2**

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à $1,30$ m du sol par la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;\,1[$ par :

$$f(x) = 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$$

où $x$ désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

1. Démontrer que la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,1[$ et déterminer ses limites aux bornes de son intervalle de définition.
2. Déterminer les valeurs du diamètre $x$ du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

# 14 Sujet 14

**Exercice 1**

On considère la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^{x} + 1.$$

1. **a.** Calculer les limites de la fonction $\varphi$ en $-\infty$ et $+\infty$.
   **b.** Calculer la dérivée de la fonction $\varphi$, puis étudier son signe.
   **c.** Dresser le tableau de variation de la fonction $\varphi$ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
2. **a.** Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
   **b.** On note $\alpha$ la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et $\beta$ la solution positive de cette équation.
   À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de $\alpha$ et $\beta$ arrondies au centième.

**Exercice 2**

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

**Partie A**

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.
On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

- évènement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
- évènement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
- évènement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.
2. **a.** Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap \overline{S}$ ?
   **b.** Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.
3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
   Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

**Partie B**

À des fins publicitaires, le grossiste affiche sur ses plaquettes : « 88 % de notre thé est garanti sans trace de pesticides ».
Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation. À cette fin, il prélève 50 boîtes au hasard dans le stock du grossiste et en trouve 12 avec des traces de pesticides.

On suppose que, dans le stock du grossiste, la proportion de boîtes sans trace de pesticides est bien égale à 0,88.
On note $F$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 boîtes, associe la fréquence des boîtes ne contenant aucune trace de pesticides.

1. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire $F$ au seuil de 95 %.
2. L'inspecteur de la brigade de répression peut-il décider, au seuil de 95 %, que la publicité est mensongère ?

# 15 Sujet 15

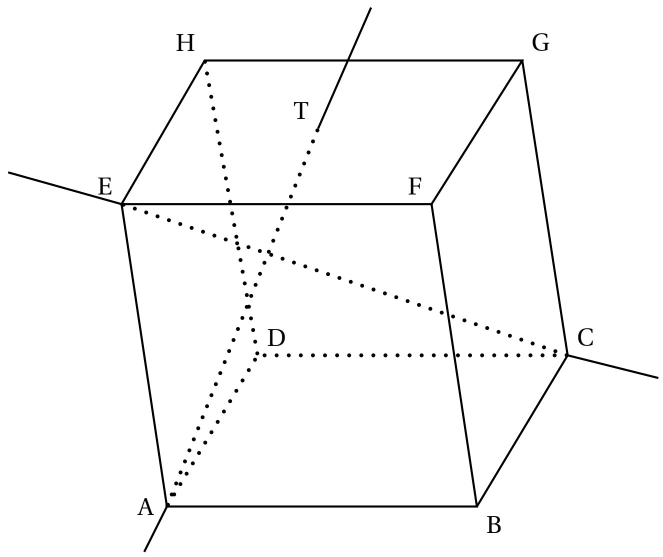
## Exercice 1

*Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.*
*Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.*

Dans les questions 1. et 2., le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2+2\text{i},\quad b = -\sqrt{3}+\text{i},\quad c = 1+\text{i}\sqrt{3},\quad d = -1+\frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\quad \text{et}\quad e = -1+\left(2+\sqrt{3}\right)\text{i}.$$

1. **Affirmation 1** : les points A, B et C sont alignés.
2. **Affirmation 2** : les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.
3. Dans cette question, l'espace est muni d'un repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
   On considère les points I(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0) et K(0 ; 0 ; 1).
   **Affirmation 3** : la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 2-t\\ y &=& 6-2t\\ z &=& -2+t\end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$, coupe le plan (IJK) au point $\text{E}\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
4. Dans le cube ABCDEFGH, le point T est le milieu du segment [HF].




**Affirmation 4** : les droites (AT) et (EC) sont orthogonales

## Exercice 2

Soit $f$ la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)\text{e}^{x}.$$

1. Calculer la limite de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que pour tout réel $x$, $f'(x) = (x+2)\text{e}^{x}$.
3. Dresser le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

# 16 Sujet 16

## Exercice 1

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire $X$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, où $\lambda$ est un réel strictement positif.

   On sait que $P(X \leqslant 2) = 0,15$.

   Déterminer la valeur exacte du réel $\lambda$.

Dans la suite de l'exercice on prendra $0,081$ pour valeur de $\lambda$.

2. **a.** Déterminer $P(X \geqslant 3)$.

   **b.** Montrer que pour tous réels positifs $t$ et $h$, $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$.

   **c.** Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?

   **d.** Calculer l'espérance de la variable aléatoire $X$ et donner une interprétation de ce résultat.

3. **Dans la suite de cet exercice, on donnera des valeurs arrondies des résultats à $10^{-3}$**

   L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égal à 1 %. Afin de vérifier cette affirmation 800 moteurs sont prélevés au hasard. On constate que 15 moteurs sont détectés défectueux.

   Le résultat de ce test remet-il en question l'annonce de l'entreprise A ? Justifier. On pourra s'aider d'un intervalle de fluctuation.

## Exercice 2

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ et considère pour tout entier $n \geqslant 0$ le point $M_n$ d'affixe $z_n$ définie par $z_0 = 732$ puis $z_{n+1} = \dfrac{1-\text{i}}{2} z_n$.

   **a.** Démontrer que la suite des modules $\left|z_n\right|$ est géométrique.

   **b.** Justifier qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que le point $M_n$ soit à l'intérieur du disque de centre $O$ et de rayon 1.

   **c.** Déterminer le plus petit entier $n$ tel que $M_n$ soit à l'intérieur du disque de centre $O$ et de rayon 1.

# 17 Sujet 17

**Exercice 1**

Dans une pièce à température constante de 20 degrés Celsius, Pauline se prépare une tasse de thé.
A l'instant initial $t = 0$, la température de son thé est de 100 degrés Celsius.
Quatre minutes plus tard, elle est de 80 degrés Celsius.
On admet que la température en degrés Celsius du thé à l'instant $t$ est donnée par :

$$\Theta(t) = C\mathrm{e}^{at} + 20$$

où $t$ est le temps en minutes et $C$ et $a$ sont des constantes réelles.
Au-dessus de 40 degrés Celsius, Pauline trouve que le thé est trop chaud et ne peut pas le boire.
Combien de minutes devra-t-elle attendre pour déguster son thé ? La réponse doit être justifiée.

**Exercice 2**

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ on considère la droite $\mathscr{D}_1$ passant par le point $A(1\,;2\,;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\ (2\,;2\,;-3)$ et la droite $\mathscr{D}_2$ de représentation paramétrique :

$$\mathscr{D}_2 \left\{\begin{array}{l} x = 16 - t \\ y = 7 + t \\ z = -4 - 2t \end{array}\right. \quad ,\ t \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}_1$.
2. Démontrer que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes en un point $C$ dont on calculera les coordonnées.

**Exercice 3** *Vrai / Faux*

1. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\ln(6x-2) + \ln(2x-1) = \ln(x).$$

**Affirmation 1 :** l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(4z^2 - 20z + 37\right)(2z - 7 + 2\mathrm{i}) = 0.$$

**Affirmation 2 :** les solutions de l'équation sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

# 18 Sujet 18

## Exercice 1

Romane utilise deux modes de déplacement pour se déplacer entre son domicile et son lieu de travail : le vélo ou les transports en commun.

Lorsque la journée est ensoleillée, Romane se déplace en vélo 9 fois sur 10.
Lorsque la journée n'est pas ensoleillée, Romane se déplace en vélo 6 fois sur 10.
La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane, est notée $p$.
Pour une journée donnée, on note :

- $E$ l'évènement « La journée est ensoleillée » ;
- $V$ l'évènement« Romane se déplace en vélo ».

1. Construire l'arbre pondéré représentant la situation.
2. Montrer que la probabilité que Romane se déplace en vélo lors d'une journée donnée est

$$P(V) = 0,3p + 0,6.$$

3. On constate que dans 67,5 % des cas, c'est en vélo que Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail.
   a. Calculer la valeur de $p$.
   b. Sachant que Romane s'est déplacée en vélo, montrer que la probabilité que la journée soit ensoleillée est $\dfrac{1}{3}$.

## Exercice 2

On considère la suite $(u_n)$ définie par

$$u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x)\,\mathrm{d}x \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que $u_0 = \dfrac{1}{2}[\ln(2)]^2$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Prouver que, pour tout entier naturel $n$ et pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[1 ; 2]$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2).$$

3. En déduire que, pour tout entier naturel $n$, on a

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

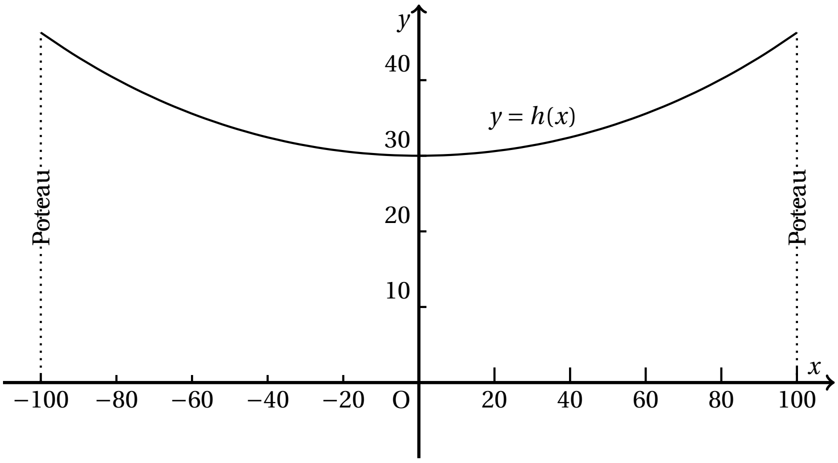
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

# 19 Sujet 19

**Exercice 1**

La hauteur d'une ligne électrique longue de 200 mètres peut être modélisée, comme sur le schéma ci-dessous, par la fonction $h$ définie sur l'intervalle $[-100\,;\,100]$ par :

$$h(x) = 15\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{100}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{100}}\right)$$




Déterminer la valeur moyenne de la fonction $h$ sur l'intervalle $[-100\,;\,100]$, qui est la hauteur moyenne de la ligne électrique.

**Exercice 2**

*Les questions sont indépendantes.*

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. On considère les points $M$ et $N$ d'affixes respectives $z_M = 2\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$ et $z_N = \dfrac{3-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$.

   La droite (MN) est-elle parallèle à l'axe des ordonnées ?
2. Déterminer l'ensemble des points $P$ du plan complexe dont l'affixe $z$ vérifie $\left|z-1+2\mathrm{i}\right| = 3$.
3. Déterminer l'ensemble des points $Q$ du plan complexe dont l'affixe $z$ vérifie $\left|z-\mathrm{i}\right| = \left|z-+2-\mathrm{i}\right|$.
4. Les points dont les affixes sont solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z-4)(z^2-4z+8) = 0$ sont-ils les sommets d'un triangle d'aire égale à 8 ?

# 20 Sujet 20

## Exercice 1

On considère la suite $(z_n)$ de nombres complexes définie pour tout entier naturel $n$ par $\left\{\begin{array}{lll} z_0 & = & 0 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times z_n + 5 \end{array}\right.$.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note $M_n$ le point d'affixe $z_n$.
On considère le nombre complexe $z_A = 4 + 2\mathrm{i}$ et A le point du plan d'affixe $z_A$.

**1.** Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $u_n = z_n - z_A$.

**a.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times u_n$.

**b.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ : $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4 - 2\mathrm{i})$.

**2.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, les points A, $M_n$ et $M_{n+4}$ sont alignés.

## Exercice 2

**Partie A**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln\left(x^2 + 1\right)$.

**1.** Résoudre dans $R$ l'équation : $f(x) = x$.

**2.** Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction $f$ en $+\infty$ que l'on admet.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | | $\nearrow$ | | $+\infty$ |

**3.** Montrer que, pour tout réel $x$ appartenant à $[0\,;\,1]$, $f(x)$ appartient à $[0\,;\,1]$.

**4.** On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Variables | $N$ et $A$ des entiers naturels ; |
| Entrée | Saisir la valeur de $A$ |
| Traitement | $N$ prend la valeur 0<br>Tant que $N - \ln\left(N^2 + 1\right) < A$<br>$N$ prend la valeur $N + 1$<br>Fin tant que |
| Sortie | Afficher $N$ |

**a.** Que fait cet algorithme ?

**b.** Déterminer la valeur $N$ fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour $A$ est 100.

**Partie B**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right)$.

**1.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ appartient à $[0\,;\,1]$.

**2.** Étudier les variations de la suite $(u_n)$.

**3.** Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente.