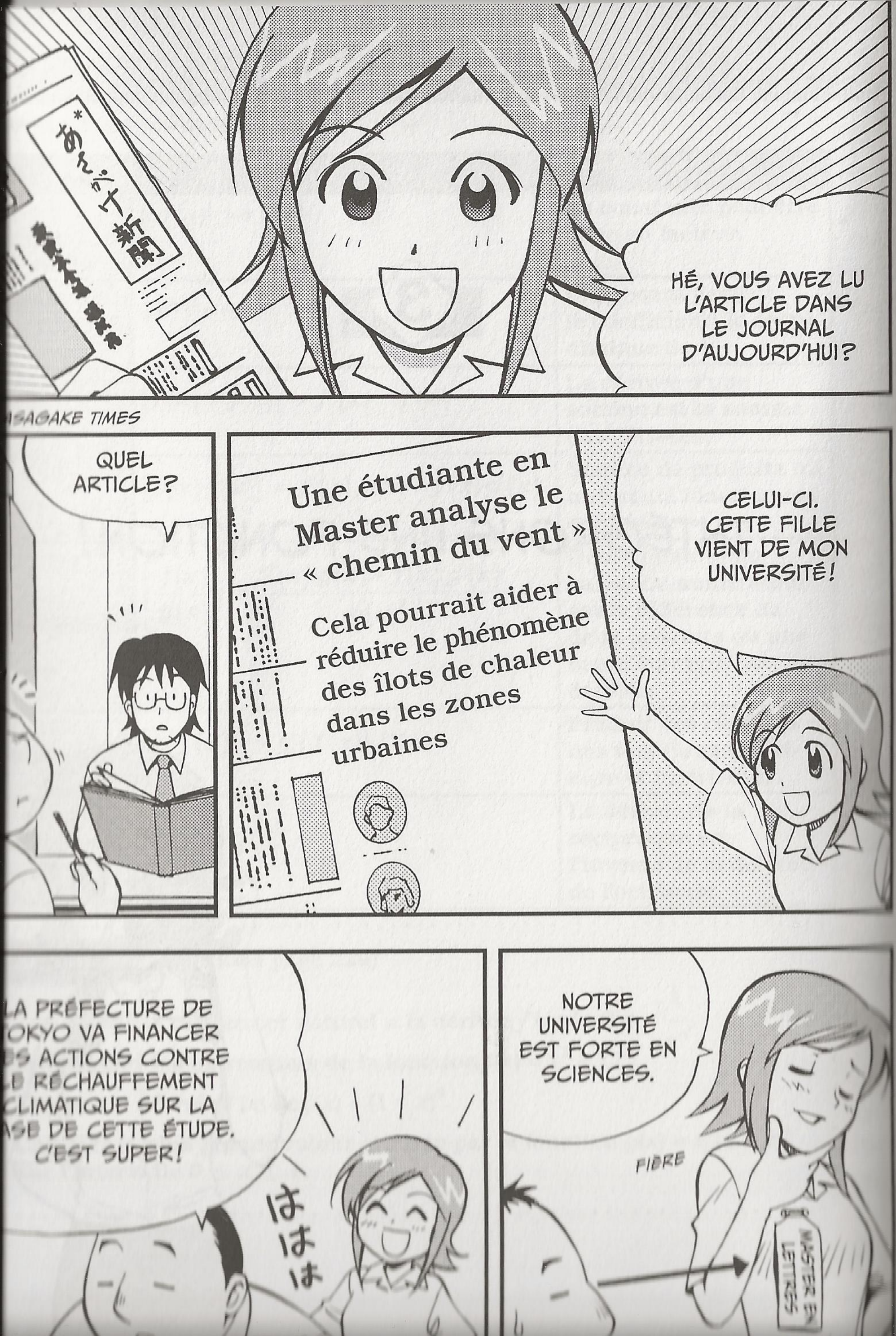
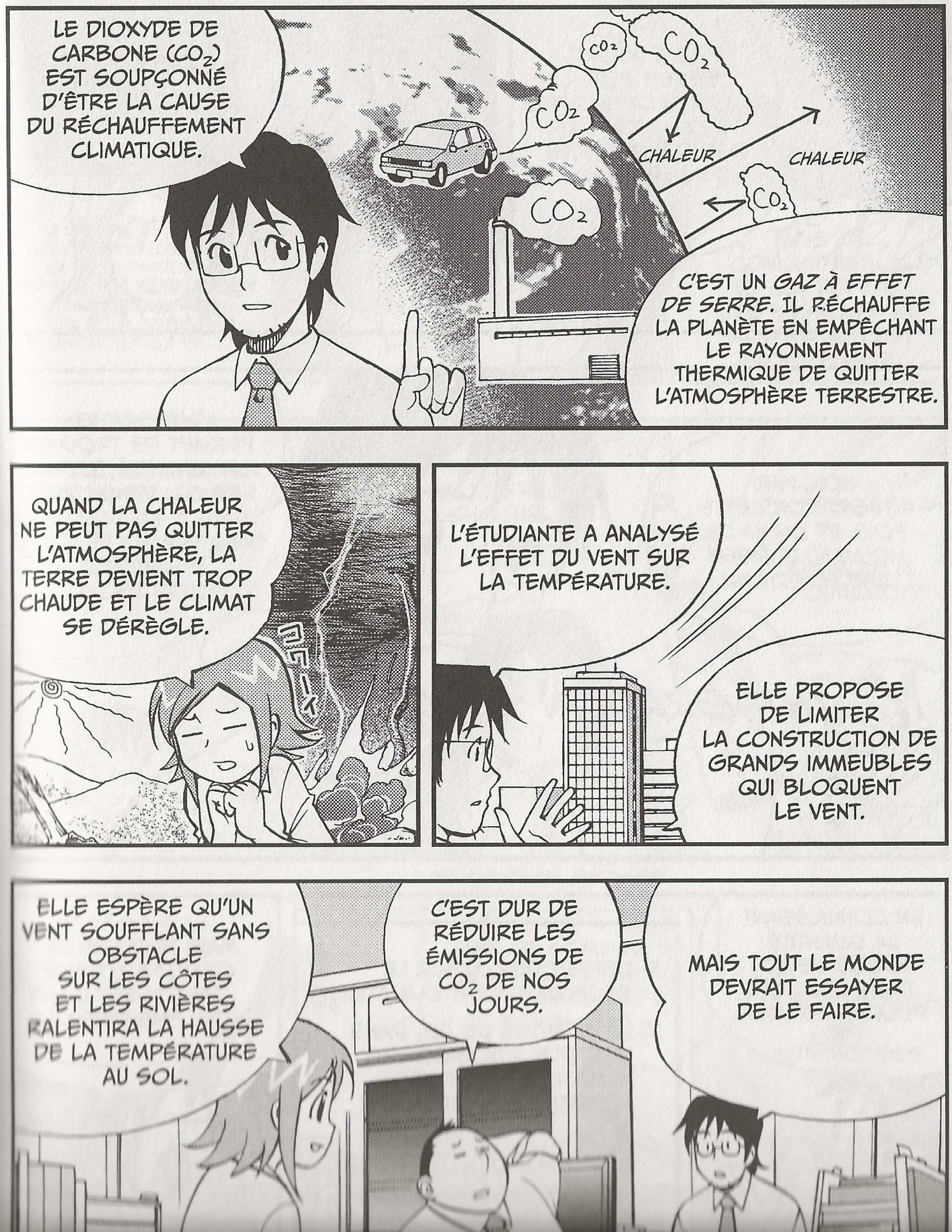
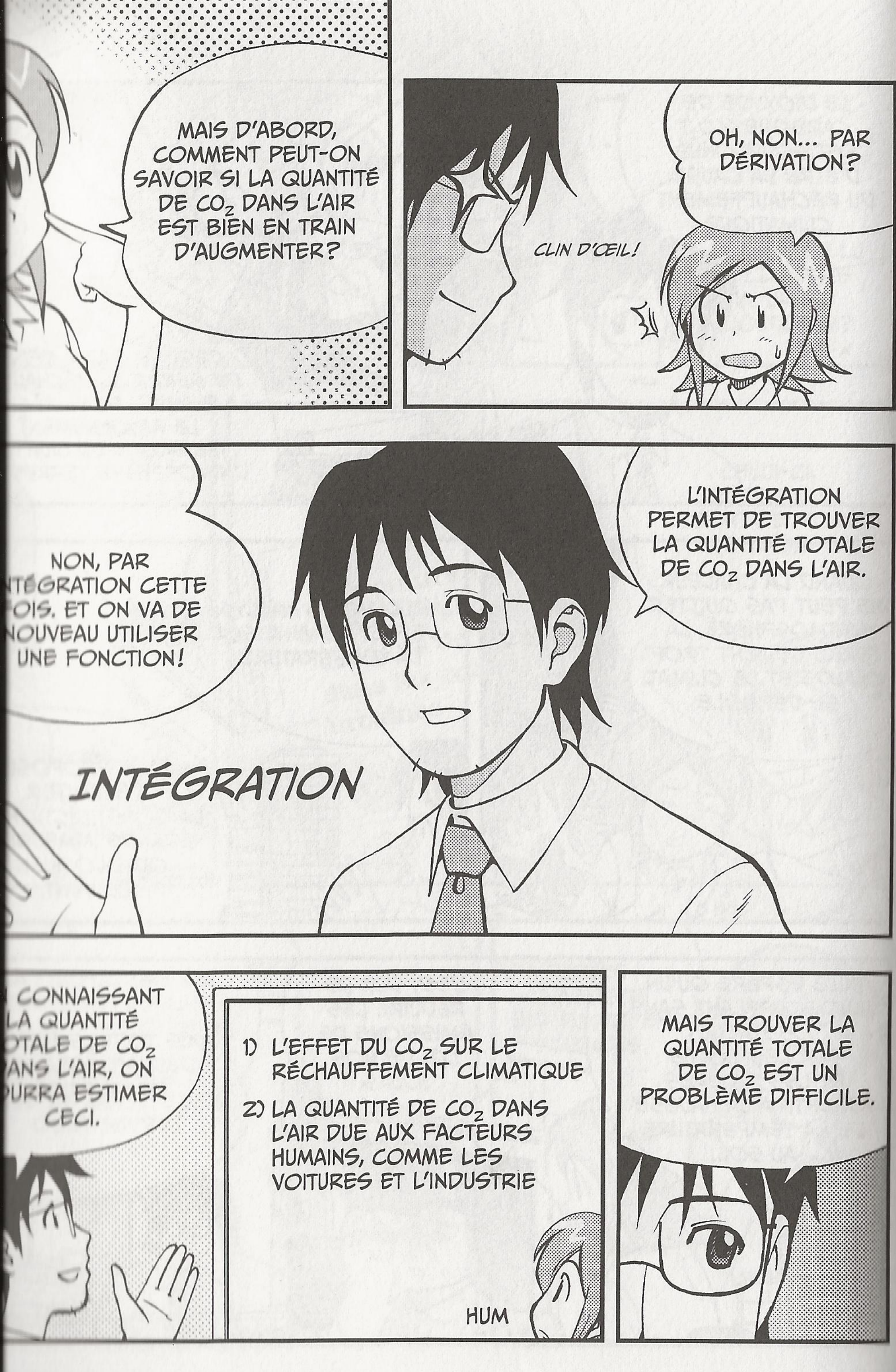
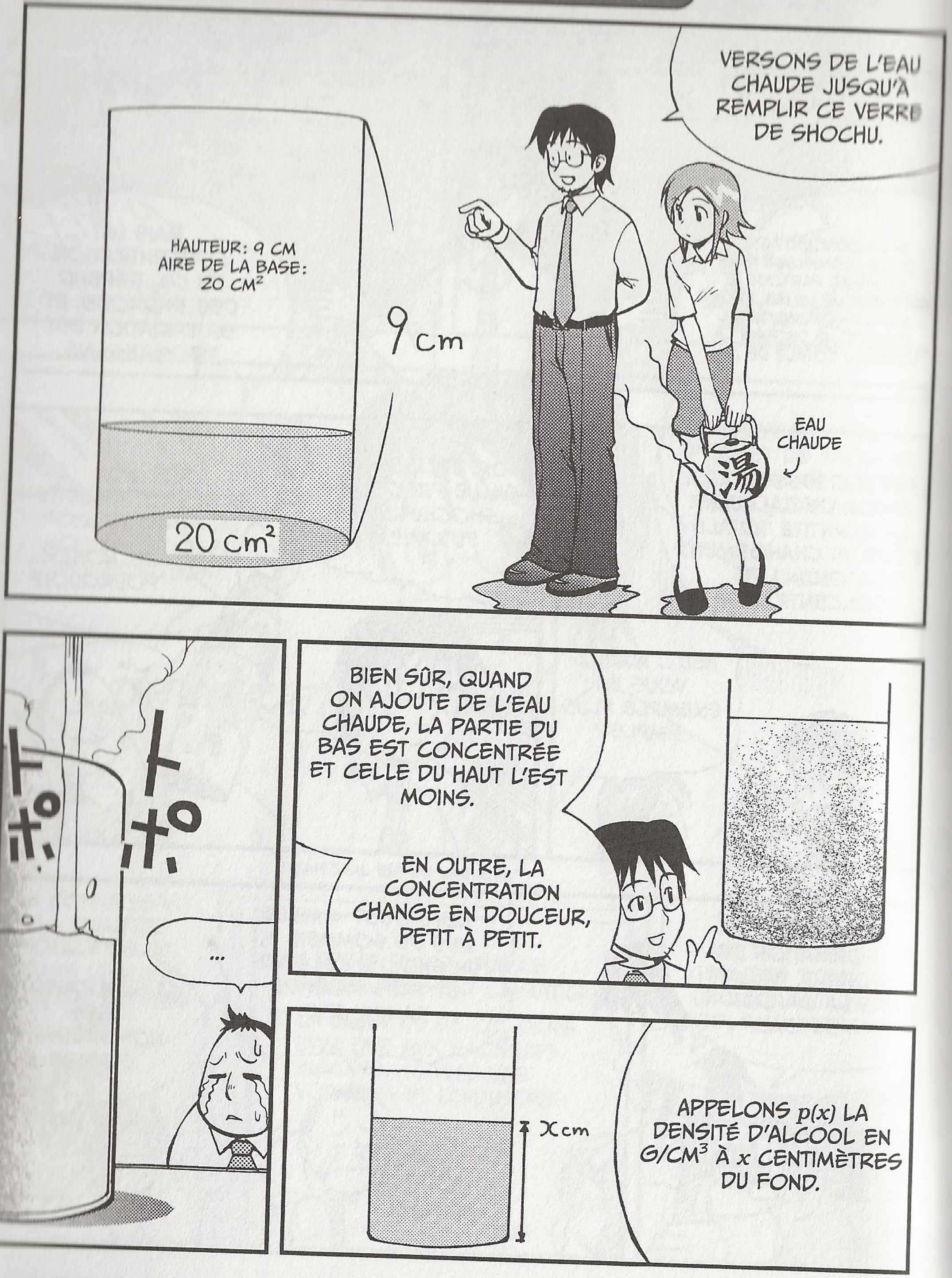
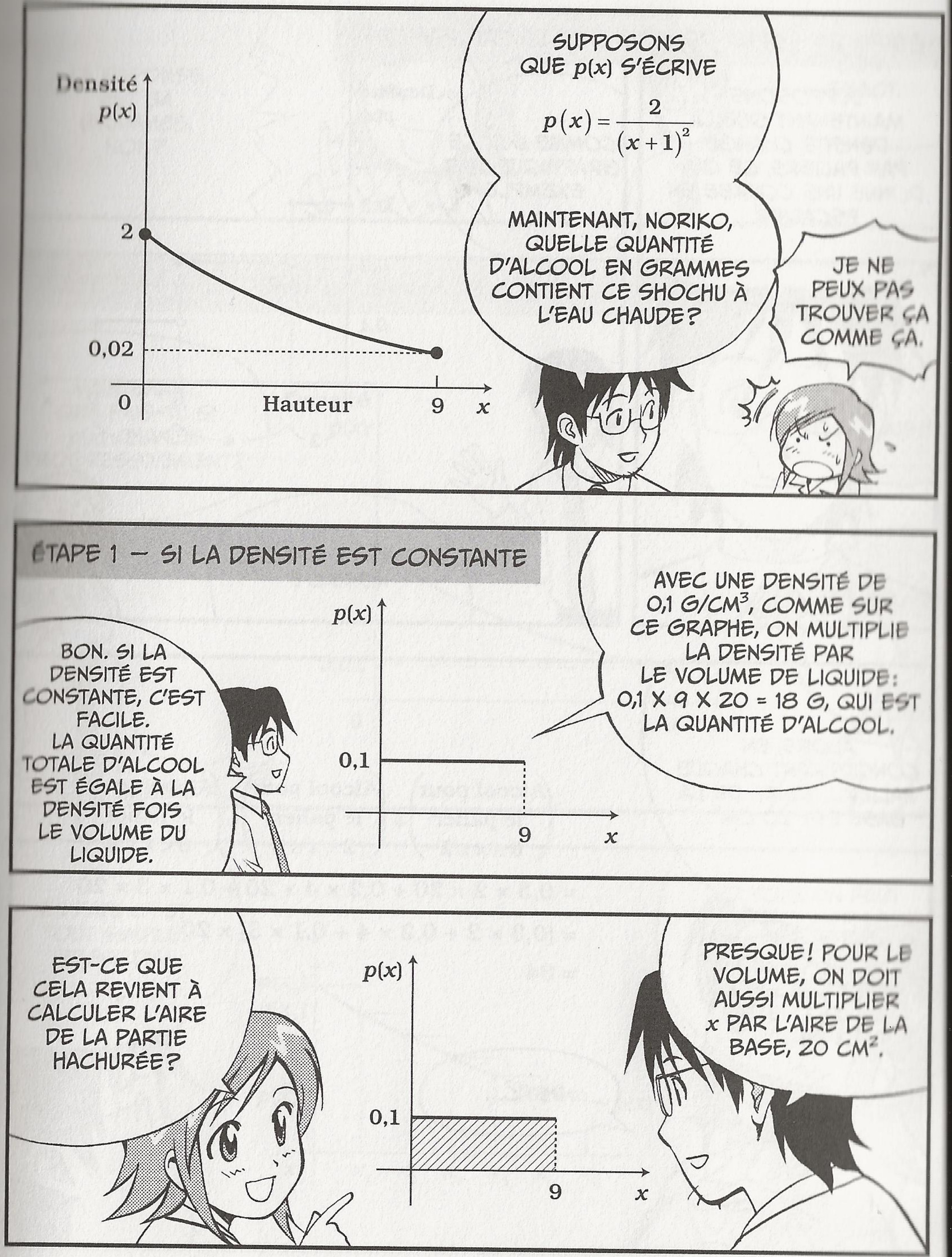

あさがけ新聞
HÉ, VOUS AVEZ LU L'ARTICLE DANS LE JOURNAL D'AUJOURD'HUI ?
SAGAKE TIMES
QUEL ARTICLE ?
Une étudiante en Master analyse le « chemin du vent »
Cela pourrait aider à réduire le phénomène des îlots de chaleur dans les zones urbaines
CELUI-CI. CETTE FILLE VIENT DE MON UNIVERSITÉ !
LA PRÉFECTURE DE
OKYO VA FINANCER
ES ACTIONS CONTRE
LE RÉCHAUFFEMENT
CLIMATIQUE SUR LA
ASE DE CETTE ÉTUDE.
C'EST SUPER !
ははは
NOTRE UNIVERSITÉ EST FORTE EN SCIENCES.
FIÈRE
MASTER EN LETTRES

LE DIOXYDE DE CARBONE (CO_2) EST SOUPÇONNÉ D'ÊTRE LA CAUSE DU RÉCHAUFFEMENT CLIMATIQUE.
CO_2
CHALEUR
CHALEUR
C'EST UN GAZ À EFFET DE SERRE. IL RÉCHAUFFE LA PLANÈTE EN EMPÊCHANT LE RAYONNEMENT THERMIQUE DE QUITTER L'ATMOSPHÈRE TERRESTRE.
QUAND LA CHALEUR NE PEUT PAS QUITTER L'ATMOSPHÈRE, LA TERRE DEVIENT TROP CHAUDE ET LE CLIMAT SE DÉRÈGLE.
L'ÉTUDIANTE A ANALYSÉ L'EFFET DU VENT SUR LA TEMPÉRATURE.
ELLE PROPOSE DE LIMITER LA CONSTRUCTION DE GRANDS IMMEUBLES QUI BLOQUENT LE VENT.
ELLE ESPÈRE QU'UN VENT SOUFFLANT SANS OBSTACLE SUR LES CÔTES ET LES RIVIÈRES RALENTIRA LA HAUSSE DE LA TEMPÉRATURE AU SOL.
C'EST DUR DE RÉDUIRE LES ÉMISSIONS DE CO_2 DE NOS JOURS.
MAIS TOUT LE MONDE DEVRAIT ESSAYER DE LE FAIRE.

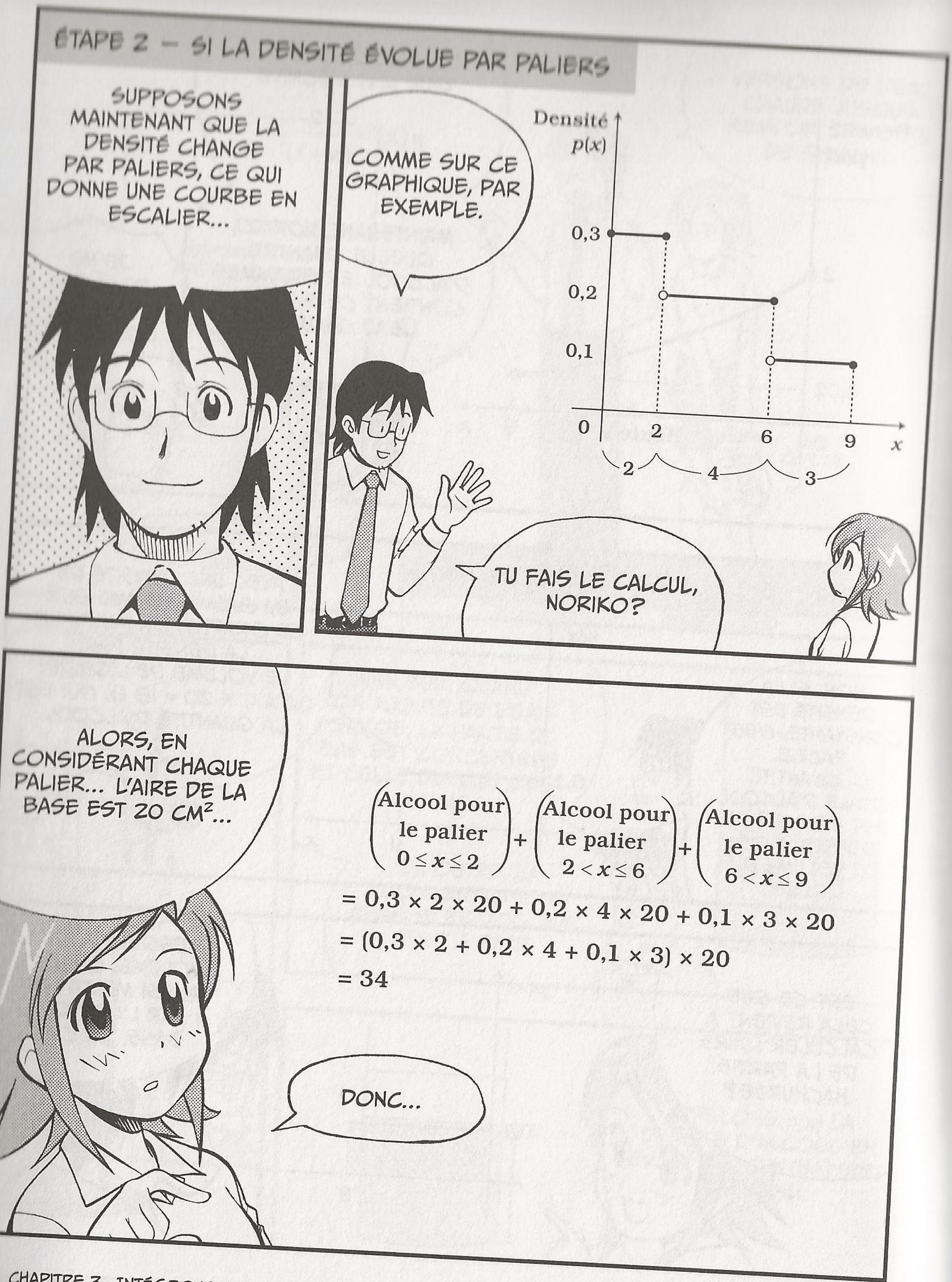

MAIS D'ABORD, COMMENT PEUT-ON SAVOIR SI LA QUANTITÉ DE CO_2 DANS L'AIR EST BIEN EN TRAIN D'AUGMENTER?
OH, NON... PAR DÉRIVATION?
CLIN D'ŒIL!
NON, PAR INTÉGRATION CETTE FOIS. ET ON VA DE NOUVEAU UTILISER UNE FONCTION!
L'INTÉGRATION PERMET DE TROUVER LA QUANTITÉ TOTALE DE CO_2 DANS L'AIR.
INTÉGRATION
CONNAISSANT LA QUANTITÉ TOTALE DE CO_2 DANS L'AIR, ON POURRA ESTIMER CECI.
1) L'EFFET DU CO_2 SUR LE RÉCHAUFFEMENT CLIMATIQUE
2) LA QUANTITÉ DE CO_2 DANS L'AIR DUE AUX FACTEURS HUMAINS, COMME LES VOITURES ET L'INDUSTRIE
HUM
MAIS TROUVER LA QUANTITÉ TOTALE DE CO_2 EST UN PROBLÈME DIFFICILE.

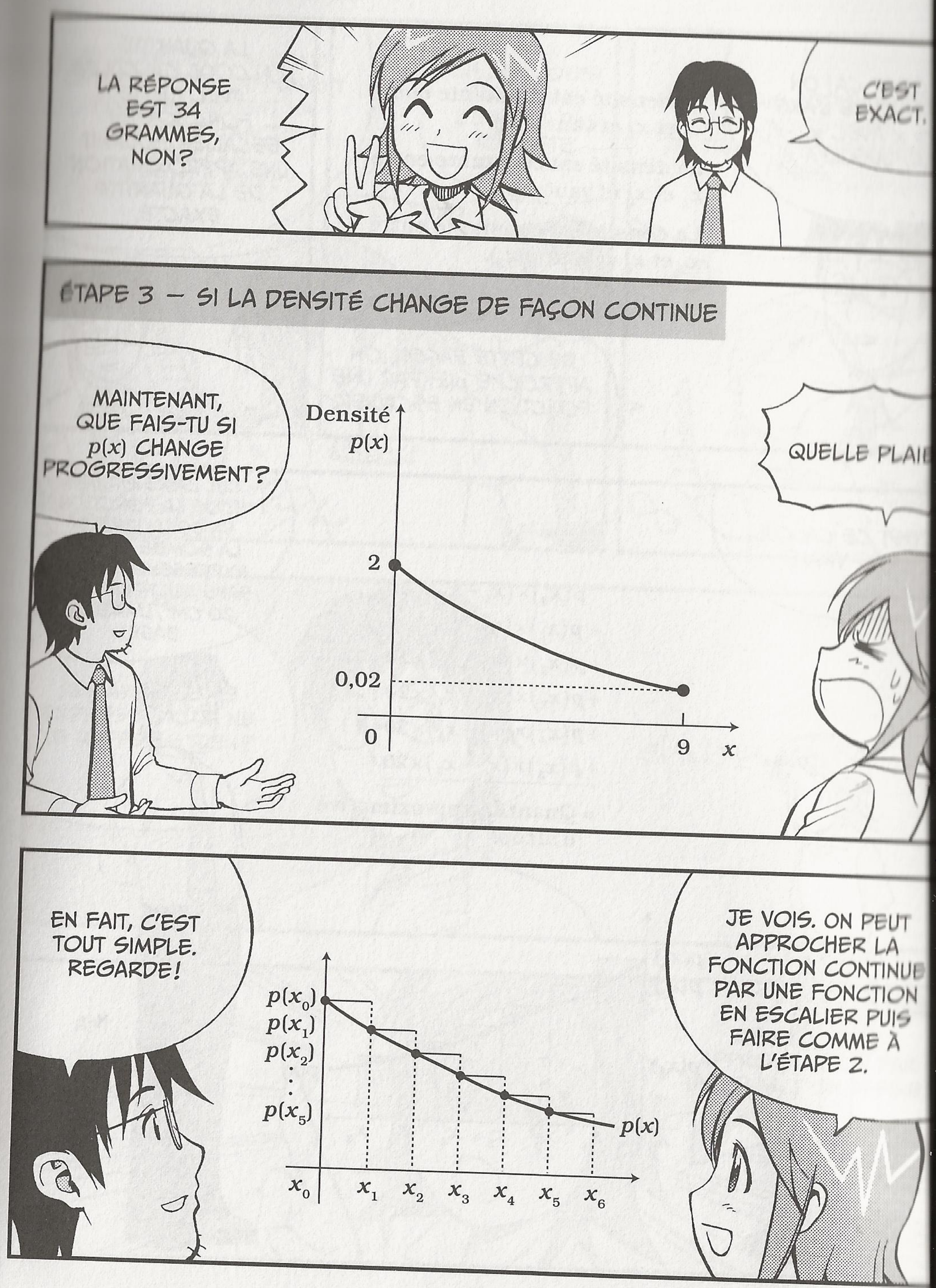

SI LA CONCENTRATION DU CO_2 DANS L'AIR ÉTAIT LA MÊME PARTOUT, IL SUFFIRAIT DE LA MULTIPLIER PAR LE VOLUME TOTAL D'AIR POUR OBTENIR LA QUANTITÉ TOTALE DE CO_2.
MAIS LA CONCENTRATION DU CO_2 DÉPEND DES ENDROITS, ET SA VARIATION EST PROGRESSIVE.
RÉFLÉCHISSONS À LA FAÇON DE CALCULER LA QUANTITÉ TOTALE POUR UN CHANGEMENT CONTINU DE CONCENTRATION.
HEU... AURIEZ-VOUS UN EXEMPLE PLUS SIMPLE?
OK. UTILISONS ÇA, LE PRÉCIEUX SHOCHU* DE FUTOSHI!
OH, NON! P... POURQUOI?
* UNE EAU-DE-VIE JAPONAISE
C'EST POUR LA FORMATION DE NORIKO. FALLAIT PAS LA GARDER AU BUREAU.
NON! C'EST « MILLE ANS DE SOMMEIL », UN SHOCHU CÉLÈBRE ET TRÈS RARE DE SANDA-CHO.
ÇA EXPLIQUERAIT SES NOMBREUSES SIESTES.

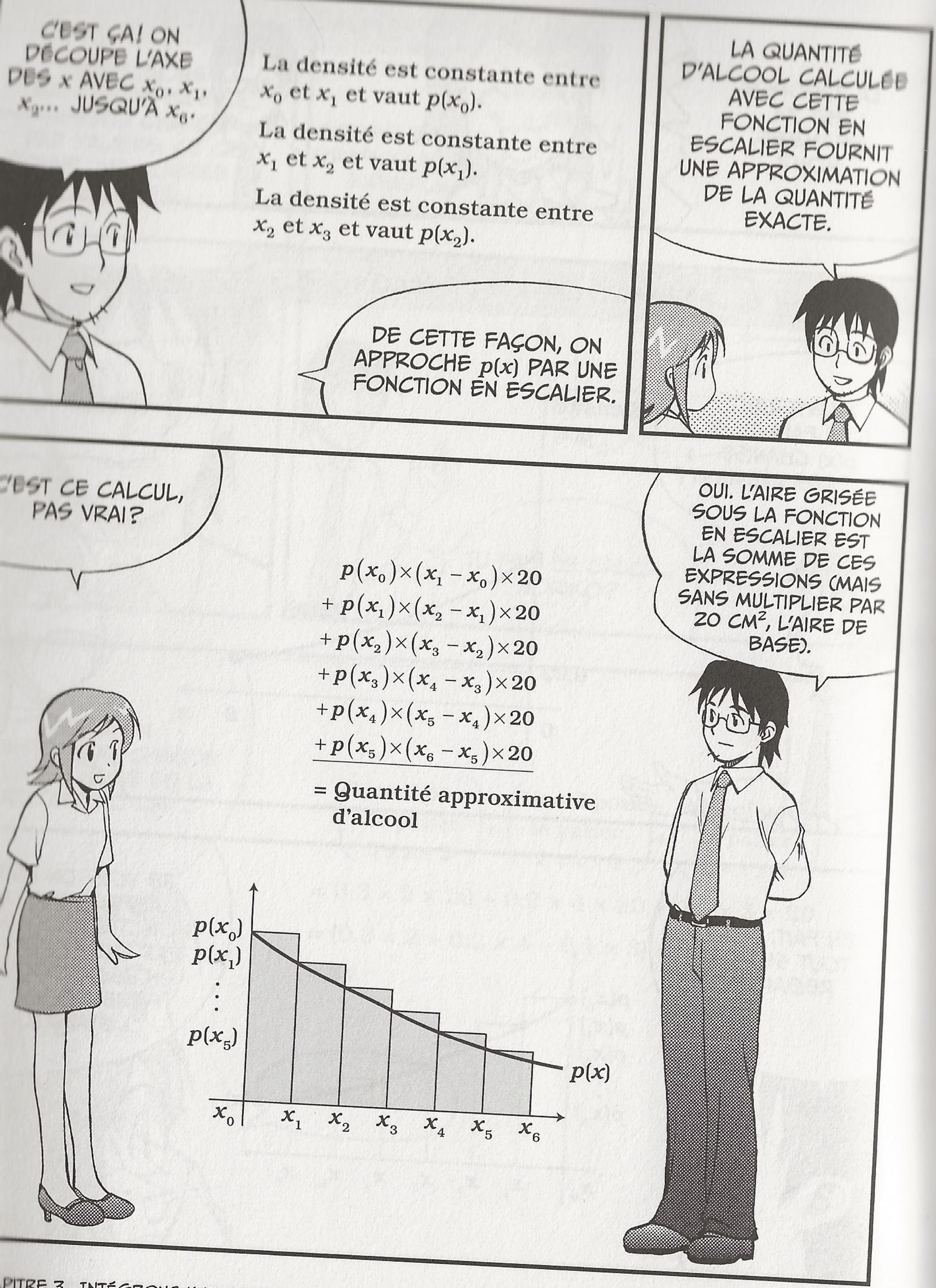
1 Illustration du théorème fondamental de l'analyse






ÉTAPE 2 – SI LA DENSITÉ ÉVOLUE PAR PALIERS
SUPPOSONS MAINTENANT QUE LA DENSITÉ CHANGE PAR PALIERS, CE QUI DONNE UNE COURBE EN ESCALIER...
COMME SUR CE GRAPHIQUE, PAR EXEMPLE.
Densité $p(x)$
0,3
0,2
0,1
0
2
6
9
x
2
4
3
TU FAIS LE CALCUL, NORIKO?
ALORS, EN CONSIDÉRANT CHAQUE PALIER... L'AIRE DE LA BASE EST 20 CM²...
(Alcool pour le palier $0 \le x \le 2$) + (Alcool pour le palier $2 < x \le 6$) + (Alcool pour le palier $6 < x \le 9$)
= 0,3 × 2 × 20 + 0,2 × 4 × 20 + 0,1 × 3 × 20
= (0,3 × 2 + 0,2 × 4 + 0,1 × 3) × 20
= 34
DONC...


LA RÉPONSE EST 34 GRAMMES, NON?
C'EST EXACT.
ÉTAPE 3 – SI LA DENSITÉ CHANGE DE FAÇON CONTINUE
MAINTENANT, QUE FAIS-TU SI $p(x)$ CHANGE PROGRESSIVEMENT?
Densité $p(x)$
2
0,02
0
9
x
QUELLE PLAI
EN FAIT, C'EST TOUT SIMPLE. REGARDE!
$p(x_0)$
$p(x_1)$
$p(x_2)$
$p(x_5)$
$p(x)$
x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6
JE VOIS. ON PEUT APPROCHER LA FONCTION CONTINUE PAR UNE FONCTION EN ESCALIER PUIS FAIRE COMME À L'ÉTAPE 2.


C'EST ÇA! ON DÉCOUPE L'AXE DES x AVEC x_0, x_1, x_2... JUSQU'À x_6.
La densité est constante entre x_0 et x_1 et vaut $p(x_0)$.
La densité est constante entre x_1 et x_2 et vaut $p(x_1)$.
La densité est constante entre x_2 et x_3 et vaut $p(x_2)$.
LA QUANTITÉ D'ALCOOL CALCULÉE AVEC CETTE FONCTION EN ESCALIER FOURNIT UNE APPROXIMATION DE LA QUANTITÉ EXACTE.
DE CETTE FAÇON, ON APPROCHE $p(x)$ PAR UNE FONCTION EN ESCALIER.
C'EST CE CALCUL, PAS VRAI?
$p(x_0)\times(x_1-x_0)\times 20$
$+\,p(x_1)\times(x_2-x_1)\times 20$
$+\,p(x_2)\times(x_3-x_2)\times 20$
$+\,p(x_3)\times(x_4-x_3)\times 20$
$+\,p(x_4)\times(x_5-x_4)\times 20$
$+\,p(x_5)\times(x_6-x_5)\times 20$
= Quantité approximative d'alcool
OUI. L'AIRE GRISÉE SOUS LA FONCTION EN ESCALIER EST LA SOMME DE CES EXPRESSIONS (MAIS SANS MULTIPLIER PAR 20 CM², L'AIRE DE BASE).
$p(x_0)$
$p(x_1)$
$p(x_5)$
$p(x)$
x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6


TU DEVRAIS ADDITIONNER UN NOMBRE INFINI DE TRANCHES INFINIMENT FINES.
∞
JE... JE VOIS.
EH BIEN, C'EST VRAI, MAIS CE N'EST PAS RÉALISTE.
ET DONC, SI L'ON REND CETTE DIVISION INFINIMENT FINE, ON OBTIENT LA QUANTITÉ EXACTE D'ALCOOL, N'EST-CE PAS?
たん
たん たん
REGARDE CETTE EXPRESSION. ÇA NE TE RAPPELLE RIEN?
$p(x_3)\times(x_4-x_3)$
AH!
ON DIRAIT UNE APPROXIMATION PAR UNE FONCTION AFFINE!

ÉTAPE 4 – APPROXIMATION PAR UNE FONCTION AFFINE

En notant $f'(x)$ la dérivée de $f(x)$, on a $f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a)$ près de $x = a$.
En soustrayant $f(a)$ des deux côtés, on obtient

$$❶\ f(x) - f(a) \approx f'(a)(x-a)$$

soit (Variation de f) ≈ (Dérivée de f) × (Variation de x)

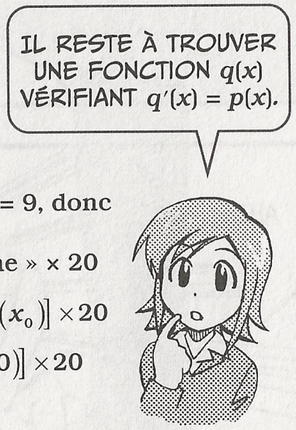
L'expression ci-dessus n'est valable que si x est proche de a. On suppose désormais que l'intervalle entre les valeurs $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_6$ est petit: x_1 est proche de x_0, x_2 est proche de x_1, et ainsi de suite.
À présent, introduisons une nouvelle fonction, $q(x)$, dont la dérivée est $p(x)$. Ceci s'écrit $q'(x) = p(x)$.
Utilisons ❶ pour cette fonction $q(x)$:

(Variation de q) ≈ (Dérivée de q) × (Variation de x)

$$q(x_1) - q(x_0) \approx p(x_0)(x_1 - x_0)$$
$$q(x_2) - q(x_1) \approx p(x_1)(x_2 - x_1)$$

La somme des termes de droite de ces expressions est approximativement égale à la somme des termes de gauche.
Or certains termes se compensent:

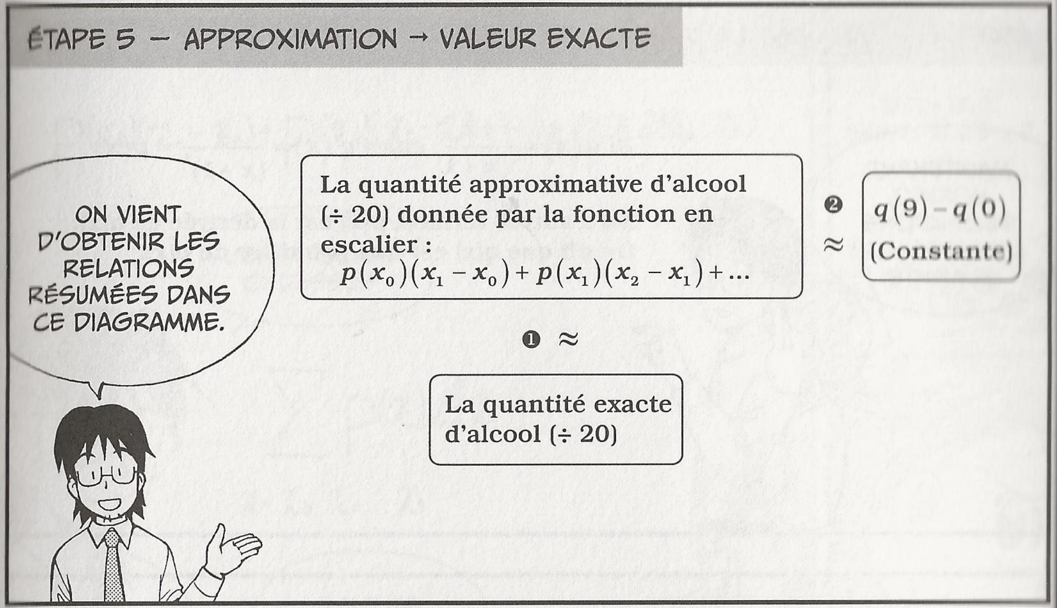
$$\begin{array}{rl}
& \cancel{q(x_1)} - q(x_0) \approx p(x_0)(x_1 - x_0) \\
& \cancel{q(x_2)} - \cancel{q(x_1)} \approx p(x_1)(x_2 - x_1) \\
& \cancel{q(x_3)} - \cancel{q(x_2)} \approx p(x_2)(x_3 - x_2) \\
& \cancel{q(x_4)} - \cancel{q(x_3)} \approx p(x_3)(x_4 - x_3) \\
& \cancel{q(x_5)} - \cancel{q(x_4)} \approx p(x_4)(x_5 - x_4) \\
+ & q(x_6) - \cancel{q(x_5)} \approx p(x_5)(x_6 - x_5) \\
\hline
& q(x_6) - q(x_0) \approx \text{« la somme »}
\end{array}$$

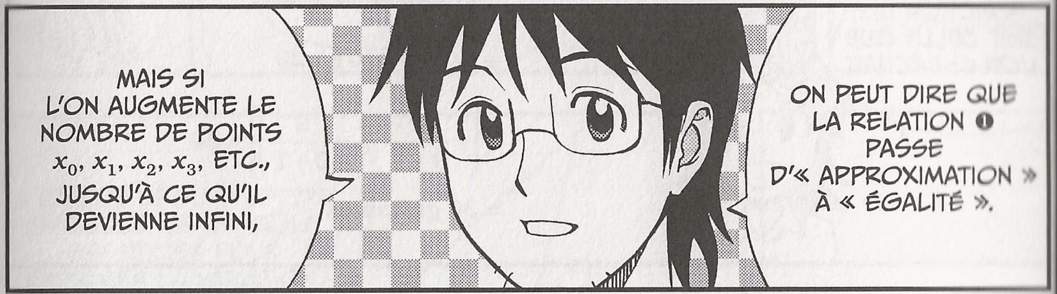


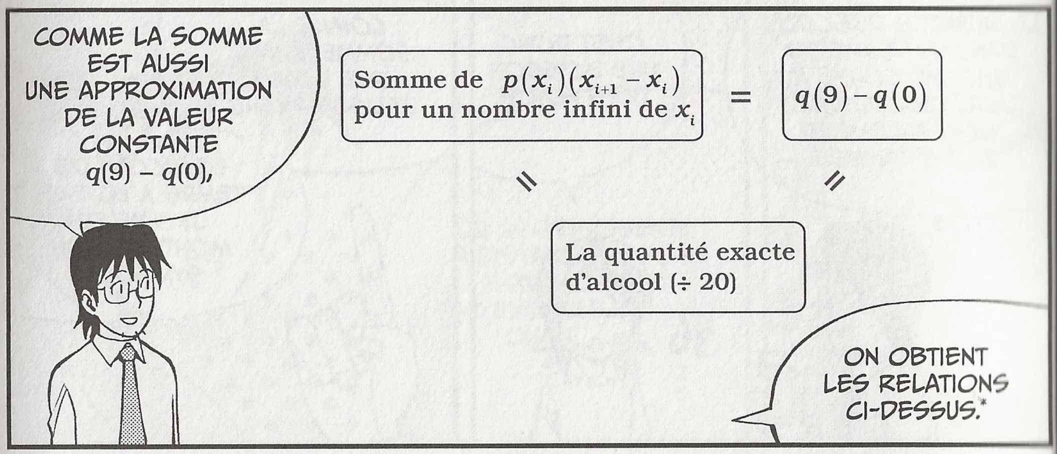
Compte tenu des dimensions du verre, $x_0 = 0$ et $x_6 = 9$, donc

$$\begin{aligned}
\text{La quantité approximative d'alcool} &= \text{« la somme »} \times 20 \\
&= [q(x_6) - q(x_0)] \times 20 \\
&= [q(9) - q(0)] \times 20
\end{aligned}$$

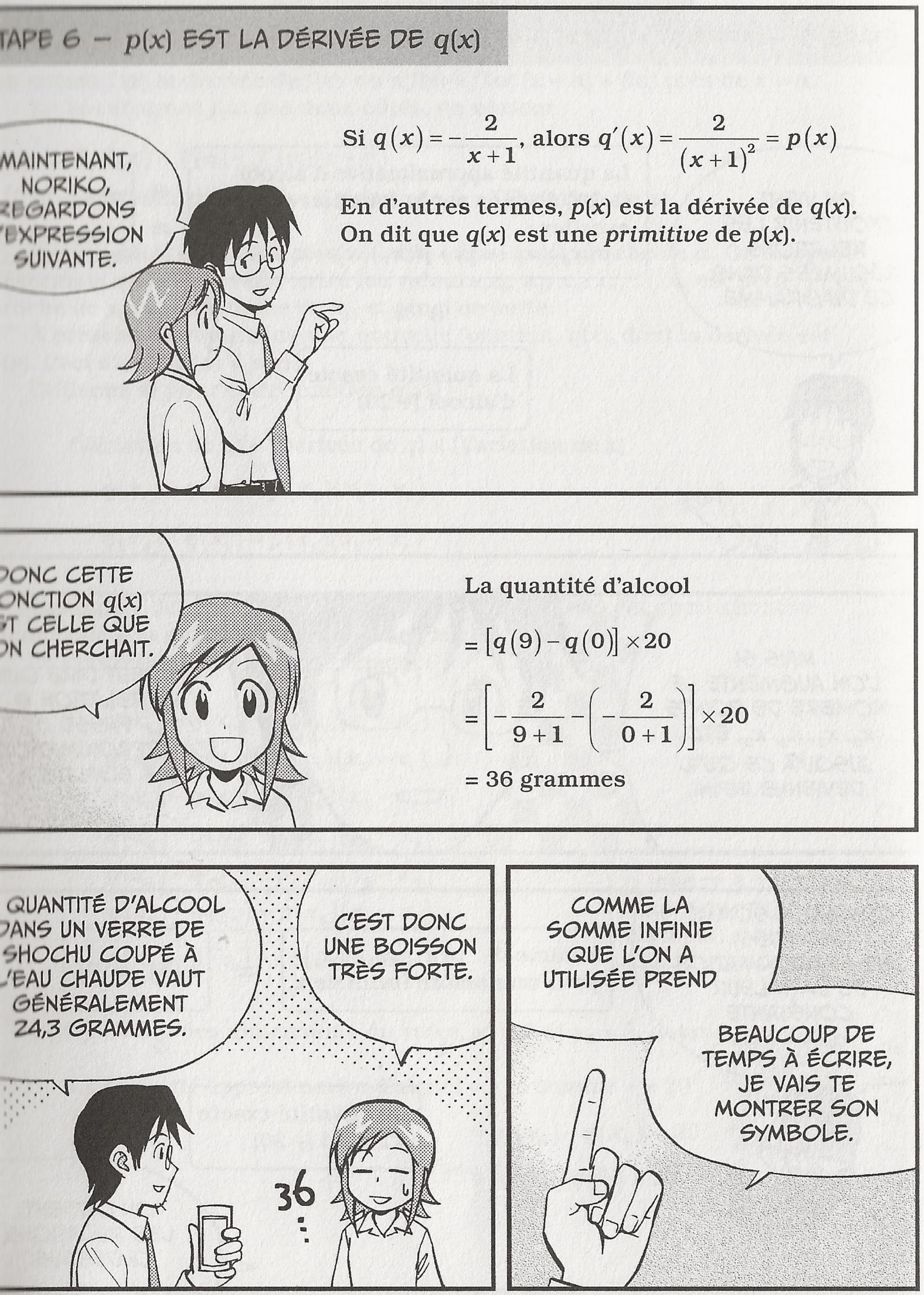
ÉTAPE 5 – APPROXIMATION → VALEUR EXACTE





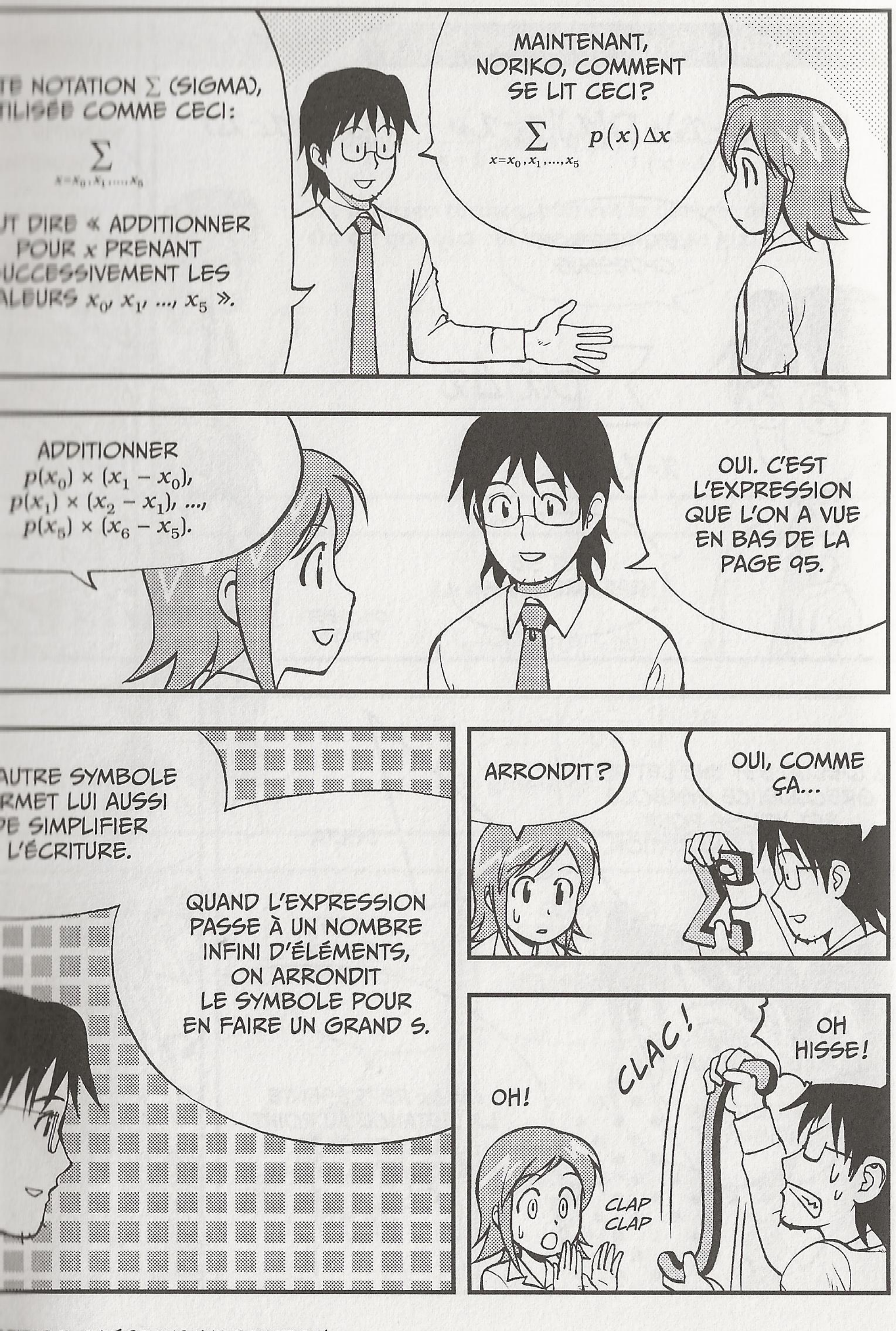


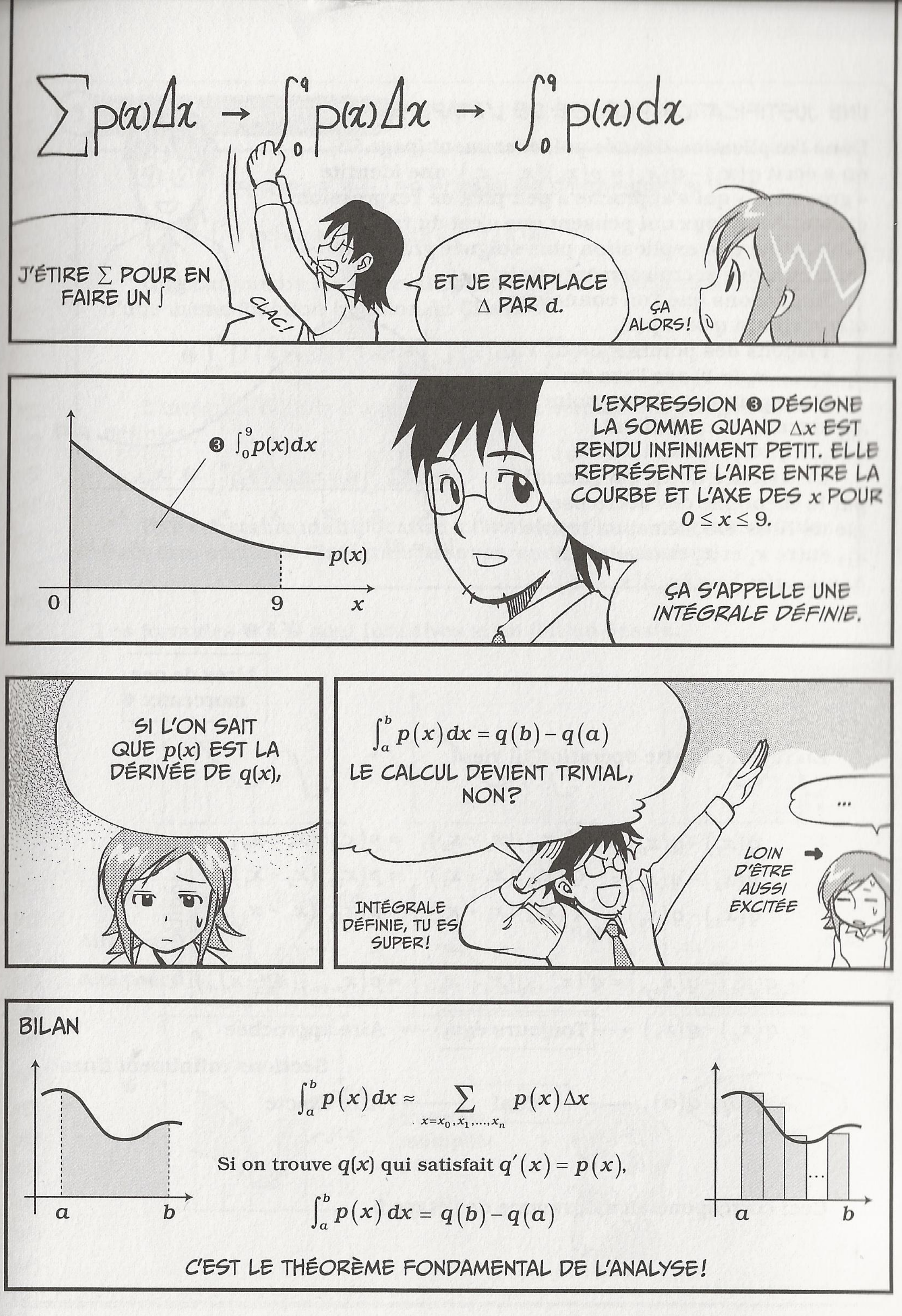
* UNE PREUVE PLUS RIGOUREUSE SERA DONNÉE PAGE 100.



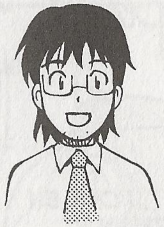
TAPE 6 – $p(x)$ EST LA DÉRIVÉE DE $q(x)$
MAINTENANT, NORIKO, REGARDONS L'EXPRESSION SUIVANTE.
Si $q(x) = -\frac{2}{x+1}$, alors $q'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} = p(x)$
En d'autres termes, $p(x)$ est la dérivée de $q(x)$.
On dit que $q(x)$ est une *primitive* de $p(x)$.
DONC CETTE ONCTION $q(x)$ T CELLE QUE ON CHERCHAIT.
La quantité d'alcool
$= [q(9) - q(0)] \times 20$
$= \left[-\frac{2}{9+1} - \left(-\frac{2}{0+1}\right)\right] \times 20$
= 36 grammes
QUANTITÉ D'ALCOOL DANS UN VERRE DE SHOCHU COUPÉ À L'EAU CHAUDE VAUT GÉNÉRALEMENT 24,3 GRAMMES.
C'EST DONC UNE BOISSON TRÈS FORTE.
36
COMME LA SOMME INFINIE QUE L'ON A UTILISÉE PREND
BEAUCOUP DE TEMPS À ÉCRIRE, JE VAIS TE MONTRER SON SYMBOLE.

2 Le théorème fondamental de l'analyse
$p(x_0)(x_1 - x_0) + p(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots + p(x_5)(x_6 - x_5)$
L'EXPRESSION CI-DESSUS
$\sum p(x)\Delta x$
$x = x_0, x_1 \ldots x_5$
PEUT SE RÉÉCRIRE AINSI.
OH, C'EST SIMPLE!
MAIS QUE SIGNIFIE CE Δ?
Δ (DELTA) EST UNE LETTRE GRECQUE. CE SYMBOLE EST UTILISÉ POUR EXPRIMER LA VARIATION.
DELTA
ET Σ?
CE Δx REPRÉSENTE LA DISTANCE AU POINT SUIVANT. C'EST, PAR EXEMPLE, $(x_1 - x_0)$ OU $(x_2 - x_1)$.


MAINTENANT, NORIKO, COMMENT SE LIT CECI?
$\sum_{x=x_0,x_1,\ldots,x_5} p(x)\Delta x$
TE NOTATION Σ (SIGMA), TILISÉE COMME CECI:
$\sum_{x=x_0,x_1,\ldots,x_5}$
UT DIRE « ADDITIONNER POUR x PRENANT UCCESSIVEMENT LES ALEURS x_0, x_1, ..., x_5 ».
OUI. C'EST L'EXPRESSION QUE L'ON A VUE EN BAS DE LA PAGE 95.
ADDITIONNER $p(x_0) \times (x_1 - x_0)$, $p(x_1) \times (x_2 - x_1)$, ..., $p(x_5) \times (x_6 - x_5)$.
AUTRE SYMBOLE RMET LUI AUSSI DE SIMPLIFIER L'ÉCRITURE.
QUAND L'EXPRESSION PASSE À UN NOMBRE INFINI D'ÉLÉMENTS, ON ARRONDIT LE SYMBOLE POUR EN FAIRE UN GRAND S.
OUI, COMME ÇA...
ARRONDIT?
OH HISSE!
CLAC!
OH!
CLAP CLAP


$\sum p(x)\Delta x \rightarrow \int_0^9 p(x)\Delta x \rightarrow \int_0^9 p(x)dx$
J'ÉTIRE Σ POUR EN FAIRE UN $\int$
CLAC!
ET JE REMPLACE Δ PAR d.
ÇA ALORS!
L'EXPRESSION ❸ DÉSIGNE LA SOMME QUAND Δx EST RENDU INFINIMENT PETIT. ELLE REPRÉSENTE L'AIRE ENTRE LA COURBE ET L'AXE DES x POUR $0 \le x \le 9$.
ÇA S'APPELLE UNE *INTÉGRALE DÉFINIE*.
❸ $\int_0^9 p(x)dx$
$p(x)$
0
9
x
SI L'ON SAIT QUE $p(x)$ EST LA DÉRIVÉE DE $q(x)$,
$\int_a^b p(x)dx = q(b) - q(a)$
LE CALCUL DEVIENT TRIVIAL, NON?
INTÉGRALE DÉFINIE, TU ES SUPER!
...
LOIN D'ÊTRE AUSSI EXCITÉE
BILAN
$\int_a^b p(x)dx \approx \sum_{x=x_0,x_1,\ldots,x_n} p(x)\Delta x$
Si on trouve $q(x)$ qui satisfait $q'(x) = p(x)$,
$\int_a^b p(x)dx = q(b) - q(a)$
a
b
a
b
C'EST LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE!

UNE JUSTIFICATION PRÉCISE DE L'ÉTAPE 5



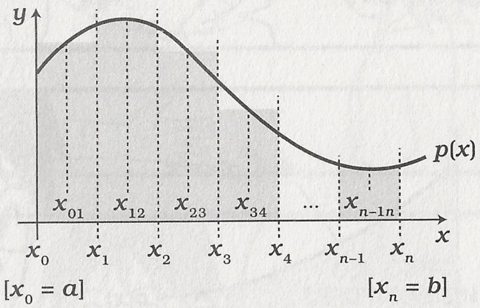
Dans l'explication donnée précédemment (page 95), on a écrit $q(x_1) - q(x_0) \approx p(x_0)(x_1 - x_0)$, une identité « grossière » qui s'approche à peu près de l'expression exacte. Pour ceux qui pensent que c'est du travail bâclé, voici une explication plus soignée grâce au théorème des accroissements finis.

Supposons que l'on connaisse $q(x)$ vérifiant $q'(x) = p(x)$.

Plaçons des points x_0 (= a), x_1, x_2, x_3, ..., x_n (= b) sur l'axe des x.

On repère ensuite un point x_{01} entre x_0 et x_1 vérifiant $q(x_1) - q(x_0) = q'(x_{01})(x_1 - x_0)$.

L'existence de x_{01} est garantie par le théorème des accroissements finis. De même, on trouve x_{12} entre x_1 et x_2 et on obtient $q(x_2) - q(x_1) = q'(x_{12})(x_2 - x_1)$.



Aires de ces morceaux

En répétant cette opération, il vient

$$
\left.
\begin{aligned}
q(x_1) - q(x_0) &= q'(x_{01})(x_1 - x_0) &&= p(x_{01})(x_1 - x_0) \\
q(x_2) - q(x_1) &= q'(x_{12})(x_2 - x_1) &&= p(x_{12})(x_2 - x_1) \\
q(x_3) - q(x_2) &= q'(x_{23})(x_3 - x_2) &&= p(x_{23})(x_3 - x_2) \\
&\cdots \qquad \cdots &&\qquad \cdots \\
+\ q(x_n) - q(x_{n-1}) &= q'(x_{n-1n})(x_n - x_{n-1}) &&= p(x_{n-1n})(x_n - x_{n-1})
\end{aligned}
\right\} \text{On additionne}
$$

$q(x_n) - q(x_0)$ ⟵ Toujours égal ⟶ Aire approchée

↓ Sections infiniment fines

$q(b) - q(a)$ ⟵ Égal ⟶ Aire exacte

Ceci correspond au diagramme de l'étape 5.

3 Formules d'intégration

FORMULE 3-1: LES FORMULES D'INTÉGRATION

❶ $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

On peut joindre les intervalles contigus des intégrales définies d'une même fonction (relation de Chasles).

❷ $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

L'intégrale définie d'une somme est la somme des intégrales définies.

❸ $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

Une constante multiplicative à l'intérieur d'une intégrale définie peut être sortie de l'intégrale (transparence aux scalaires).

Les formules ❶ à ❸ sont intuitives si on fait un dessin.