Corrigé des capacités du chapitre combinatoire

Capacité 1 ***Maîtriser les opérations ensemblistes***

On considère deux ensembles : $A = \{1,3,8,4\}$ et $B = \{4,6,5,1,3\}$.

1. Déterminer un ensemble C tel que $A \subset C$.
2. Déterminer une partie de A, distincte de A et non vide.
3. Donner un élément de B qui n'appartient pas à A.
4. Déterminer l'intersection de A et B et donner son cardinal.

5. Déterminer la réunion de A et B et donner son cardinal.
6. Déterminer le complémentaire de A dans $A \cup B$.

1) L'ensemble $C = \{1,3,8,4,5\}$ contient A.
On a $A \subset C$.

2) $D = \{1,3,4\}$ est une partie de A distincte de A et non vide.

3) L'élément 6 appartient à B mais pas à A.

4) $A \cap B = \{1,3,4\}$

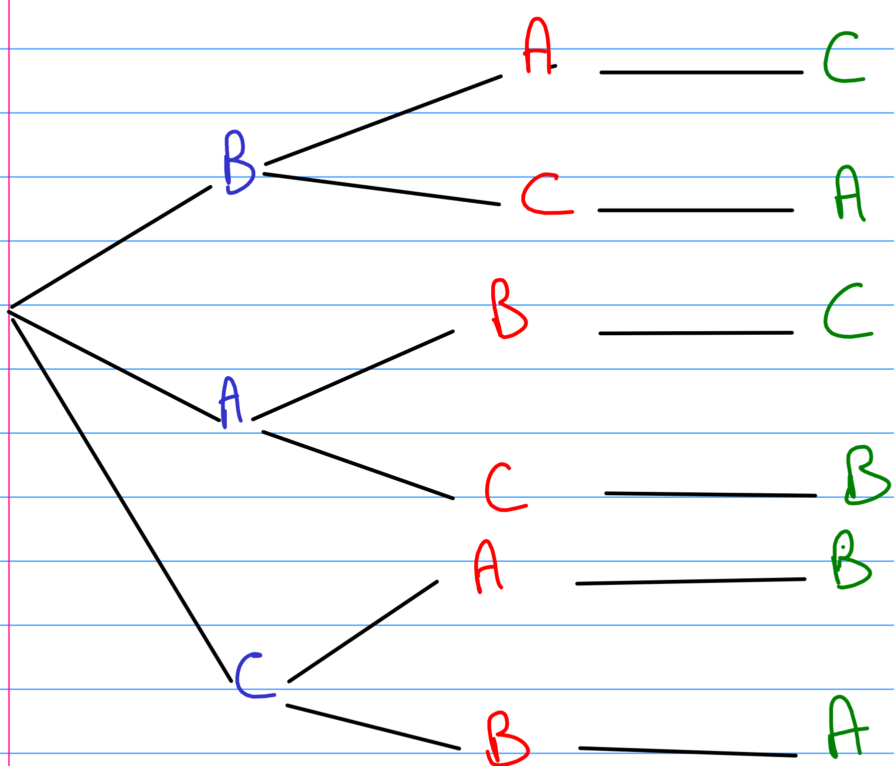
Le cardinal de $A \cap B$ est donc égal à 3.

Capacité 2 ***Effectuer un dénombrement simple à l'aide d'un arbre ou d'un tableau***

1. Combien de mots de 3 lettres, qui aient un sens ou non, peut-on former en mélangeant les 3 lettres du mot « BAC »?

2. On lance deux fois de suite un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6. Déterminer la probabilité que la somme des deux résultats obtenus soit un multiple de 3.

1) Dénombrons les anagrammes du mot BAC avec un arbre de dénombrement.



On a :

$3 \times 2 \times 1 = 6$

anagrammes du mot BAC.

1er choix 2ème choix 3ème choix

2) On peut modéliser l'univers Ω de cette expérience aléatoire par l'ensemble des couples ou 2-uplets constitués du résultat du 1er dé et du résultat du 2nd dé.
On a $6 \times 6 = 36$ 2-uplets et on peut utiliser un arbre ou un tableau à 2 entrées pour les énumérer.

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

On s'intéresse à la somme des deux faces obtenues donc on peut remplir le tableau avec les résultats des sommes.
On entoure en rouge les sommes multiples de 3, il en existe 12.

Les dés étant équilibrés on peut définir sur Ω une loi d'équiprobabilité.
La probabilité de l'événement : "obtenir un multiple de 3" est donc égale à :

$$\frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues totales}} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

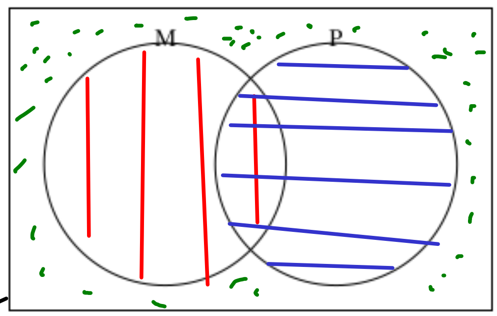
Capacité 3 ***Utiliser le principe additif pour dénombrer***

Dans une classe de 35 élèves, 25 élèves suivent la spécialité Mathématiques, 20 élèves suivent la spécialité Physique et 8 élèves ne suivent ni la spécialité Mathématiques ni la spécialité Physique.

1. Compléter le diagramme de Venn ci-dessous où M représente les Mathématiques et P représente la Physique.

Ni Maths
Ni Physique
$\overline{M} \cap \overline{P}$
Card $(\overline{M} \cap \overline{P}) = 8$

Ω : la classe
Card$(\Omega) = 35$



Maths
Card$(M) = 25$

Physique
Card$(P) = 20$

Maths et Physique

2. Calculer le nombre d'élèves qui suivent la spécialité Mathématiques ou la spécialité Physique.
3. Calculer le nombre d'élèves qui suivent la spécialité Mathématiques et la spécialité Physique.

2) On a card $(\overline{M} \cap \overline{P}) = 8$

$\overline{M} \cap \overline{P}$ est le complémentaire de $M \cup P$

donc Card$(M \cup P) = $ card$(\Omega) - $ Card$(\overline{M} \cap \overline{P})$

Card$(M \cup P) = 35 - 8 = 27$

3) D'après la formule du crible, on a :

card$(M \cup P) = $ card$(M) + $ card$(P) - $ card$(M \cap P)$

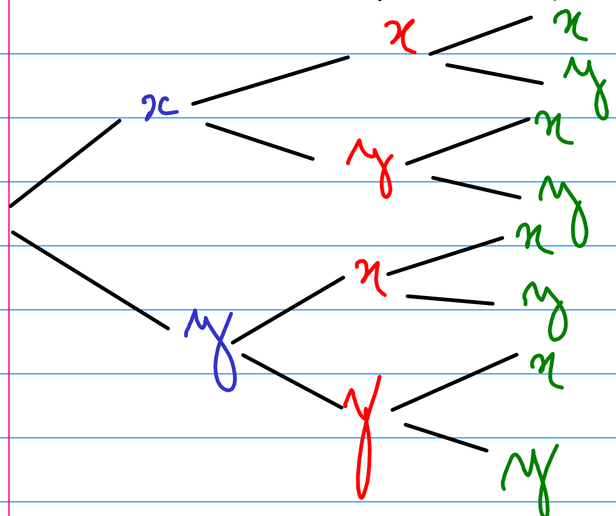
donc on a : card$(M \cap P) = $ card$(M) + $ card$(P) - $ card$(M \cup P)$

On a donc $\text{card}(M \cap P) = 25 + 20 - 27 = 18$

Capacité 4 ***Utiliser le principe multiplicatif pour dénombrer***

1. Déterminer la liste des triplets de l'ensemble $E = \{x, y\}$. On pourra s'aider d'un arbre.
2. Combien de séquences génétiques de 50 nucléotides peut-on former à l'aide des quatre nucléotides de base A, C, G et T ?
3. Un octet est codée sur 8 bits et un bit peut prendre deux valeurs 0 ou 1. Combien de valeurs différentes peut-on coder sur un octet ?
4. Un pixel est constitué de trois composantes (Rouge, Vert, Bleu) et chacune est codée sur un octet. Combien de couleurs différentes peut-on coder ainsi ?

1) Ensemble des triplets / 3-uplets de l'ensemble $E = \{x, y\}$



On a $2^3 = 8$ triplets de l'ensemble E :

(x, x, x)

(x, x, y)

...

(y, y, y)

2) Avec les 4 nucléotides pris dans l'ensemble $E = \{A, C, G, T\}$ on peut former 4^{50} séquences génétiques, c'est le nombre de 50-uplets de E, ou encore le cardinal du produit cartésien :

$$\underbrace{E \times \dots \times E}_{50 \text{ fois}} = E^{50}$$

3) Le nombre de 8-uplets d'éléments de $E = \{0 ; 1\}$ est $2^8 = 256$

4) Chaque pixel codé sur un octet est un élément du produit cartésien $F = \{0;1\}^8$ qui ~~a~~ pour cardinal $2^8 = 256$.
Un pixel de couleur est un 3-uplet d'éléments de F donc il existe $(\mathrm{Card}(E))^3 = 256^3$ pixels de couleurs distincts.

On a $256^3 = 16\,777\,216 \simeq 16{,}8$ millions de couleurs

Capacité 5 ***Dénombrer des k-uplets d'éléments deux à deux distincts***

1. Sur sa guitare, Martha joue avec sept notes : *Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si*. Combien d'accords différents peut-elle obtenir avec quatre notes distinctes de cet ensemble? et avec quatre notes qui peuvent être confondues?

2. Huit athlètes s'affrontent sur un 100 mètres. Déterminer le nombre de podiums possibles (or, argent, bronze).

3. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle retourne le nombre de k-uplets d'éléments deux à deux distincts d'un ensemble à n éléments :

```
def kuplets_distincts(n, k):
    c = 1
    ...............
    ...............
    return c
```

1). Ensemble des notes : $E = \{Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si\}$
$\mathrm{Card}(E) = 7$.

. Nombre de 4-uplets d'éléments distincts de E :
$7 \times 6 \times 5 \times 4 = 820$

• Nombre de 4-uplets d'éléments de E qui peuvent être identiques : 7^4.

2) L'ensemble E est constitué des 8 coureurs.
Card (E) = 8
Le nombre de podiums est le nombre de 3-uplets d'éléments distincts de E : $8 \times 7 \times 6 = 336$.

```
def kuplets_distincts(n, k):
    c = 1
    for i in range(0,k):
        c = c × (n-i)
    return c
```

Algorithmique 1 ***Factorielle de*** n

1. Déterminer le nombre de classements possibles dans une course de 8 chevaux.
2. À l'aide du tableau page 16 du manuel Indice, calculer 12! avec la calculatrice. Donner une interprétation de ce nombre.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a $n! = n \times (n-1)!$.
4. Démontrer que le nombre de k-uplets d'éléments deux à deux distincts d'un ensemble à n éléments est égal à $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.
5. Compléter la fonction Python ci-dessous pour que `fact(n)` soit égal à n! pour tout entier naturel n non nul.

```
def fact(n):
    f = 1
    for k in range(....,  ......):
        f = .....
    return f
```

1) Le nombre de classements possibles dans une course de 8 chevaux est le nombre de permutations d'un ensemble à 8 éléments, c'est-à-dire 8!

On a $8! = 40320$

2) On a $12! = 479\,001\,600$

3) Pour tout entier naturel n non nul, on a :

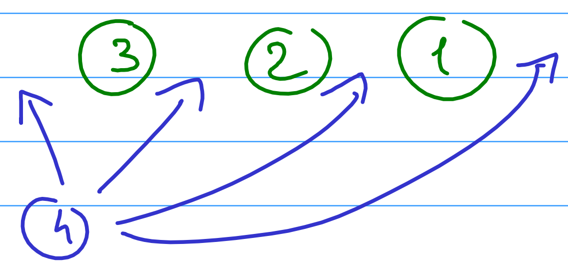
$$n! = \underbrace{1\times 2\times \dots \times(n-1)}_{(n-1)!}\times n = (n-1)!\times n$$

Par ailleurs considérons l'ensemble $E_n=\{1,\dots,n\}$ des n premiers entiers naturels.

On a $\quad E_n = E_{n-1}\cup\{n\}$

Pour une permutation de E_{n-1} fixée, il existe n façons d'insérer l'élément n, donc chaque permutation de E_{n-1} va donner n permutations de E_n.

Un exemple pour $n=4$:



permutation de E_{n-1}

En insérant 4 on obtient 4 permutations de E_n:

4 3 2 1
3 4 2 1
3 2 4 1
3 2 1 4

De plus chaque permutation de E_n est une permutation de E_{n-1} dans laquelle on a inséré l'élément n.

On en déduit que $\operatorname{card}(E_n) = n\times \operatorname{card}(E_{n-1})$

et donc $n! = n \times (n-1)!$

```
def fact(n):
    f = 1
    for k in range(1, n+1):    ou 2
        f = f×k
    return f
```

Algorithmique 2 ***Tirage aléatoire d'une permutation***

On peut modéliser le tirage aléatoire d'une permutation de l'ensemble des entiers entre 1 et n, par le n-uplet obtenu lors de n tirages successifs sans remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

Compléter la fonction Python ci-dessous, pour que `generer_perm(n)` soit un tirage aléatoire de l'ensemble des entiers entre 1 et n.

```
def generer_perm(n):
    perm = []
    urne = list(range(1, n + 1))
    for k in range(n):
        index_aleatoire = randint(0, len(urne)-1)
        choix = urne.pop(index_aleatoire)
        perm.append(choix)
    return perm
```

Capacité 6 *Dénombrement par codage binaire et fonction indicatrice*

Soit E un ensemble fini contenant n éléments : $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
On définit une fonction indicatrice $\mathscr{I}$ de E, qui à chaque partie P de $\mathscr{P}(E)$ associe l'unique n-uplets de $\{0, 1\}$ tel que pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\begin{cases} i_k = 1 \text{ si } e_k \in P \\ i_k = 0 \text{ si } e_k \notin P \end{cases}$$

1. Déterminer le nombre de parties de l'ensemble à 0 élément, l'ensemble vide noté $\varnothing$.
2. On considère un ensemble E à trois éléments $E = \{e_1, e_2, e_3\}$.
   - **a.** Énumérer toutes les parties de $\mathscr{P}(E)$ puis déterminer pour chaque partie son image par la fonction indicatrice $\mathscr{I}$ de E décrite ci-dessus.
   - **b.** Justifier que deux partie distinctes de $\mathscr{P}(E)$ ont des images distinctes par la fonction indicatrice $\mathscr{I}$ de E. On dit que la fonction indicatrice de E est *injective*.
   - **c.** Justifier que tout 3-uplet de $\{0, 1\}$ est l'image d'une partie de $\mathscr{P}(E)$ par la fonction indicatrice $\mathscr{I}$ de E. On dit que la fonction indicatrice de E est *surjective*.
   - **d.** La fonction indicatrice de E étant *injective* et *surjective*, on dit qu'elle est *bijective*, cela signifie qu'on peut définir sa fonction réciproque : pour tout 3-uplet de $\{0, 1\}$, il existe une unique partie de $\mathscr{P}(E)$ dont elle est l'image. Que peut-on en déduire pour le nombre d'éléments de $\mathscr{P}(E)$?
3. Généraliser la question précédente au cas d'un ensemble E à n éléments avec n entier non nul.

1) L'ensemble vide noté $\varnothing$, a une seule partie : lui-même.

2) Soit un ensemble à trois éléments $E = \{e_1, e_2, e_3\}$.

a) Déterminer toutes les parties d'un ensemble à 3 éléments équivaut à déterminer toutes les images de la fonction indicatrice de E définie sur l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ de ses parties.

L'image d'une partie de E par la fonction indicatrice est un triplet de l'ensemble $\{0;1\}$ indiquant si chaque élément e_1, e_2 puis e_3 appartient à la partie : 1 s'il appartient et 0 sinon.

Image de la fonction
indicatrice

	Partie
0 0 0	$\emptyset$ ensemble vide
0 0 1	$\{e_3\}$
0 1 0	$\{e_2\}$
0 1 1	$\{e_2, e_3\}$
1 0 0	$\{e_1\}$
1 0 1	$\{e_1, e_3\}$
1 1 0	$\{e_1, e_2\}$
1 1 1	$\{e_1, e_2, e_3\}$

b) Deux parties distinctes de $\mathcal{P}(E)$ ont au moins un élément qui appartient à l'une mais pas à l'autre ce qui donne des valeurs différentes dans les images de ces deux parties par la fonction indicatrice

c) Par définition de la fonction indicatrice, toute partie de E a une image par la fonction indicatrice

(*) distinctes évidemment.

d) On en déduit que le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ (nombre de parties de E) est le nombre d'images* de la fonction indicatrice, c'est-à-dire 2^3 dans l'exemple d'un ensemble E à 3 éléments.

2) En raisonnant comme pour un ensemble à 3 éléments, on obtient que le nombre de parties d'un ensemble E à n éléments est le nombre d'images distinctes de sa fonction

indicatrice, c'est-à-dire le nombre de n-uplets de l'ensemble $\{0;1\}$, c'est-à-dire 2^n.
En informatique on parlerait du nombre de mots codés sur n bits.

Capacité 7 ***Appliquer un raisonnement par récurrence pour dénombrer***

1. Quel est le nombre de parties de l'ensemble vide qui contient 0 élément?
2. Soit un entier naturel n, on suppose que le nombre de parties de tout ensemble fini à n éléments est égal à 2^n et on considère un ensemble E à $n+1$ éléments. On note x un élément de E et $E' = E \setminus \{x\}$ l'ensemble à n éléments obtenu si on enlève x de E.
   a. Déterminer le nombre de parties de E' qui est aussi le nombre de parties de E qui ne contiennent pas x.

   b. Comment peut-on en déduire le nombre de parties de E qui contiennent x?
   c. Conclure sur le nombre de parties de E.
3. Rédiger une preuve par récurrence du théorème 2.

1) L'ensemble vide $\emptyset$ avec 0 élément, contient exactement une partie, lui-même.
On a donc $\text{card}(\emptyset) = 1$.

2) a) $E' = E \setminus \{x\}$ est un ensemble avec $n+1-1 = n$ éléments. Par l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{P}(E')$ comporte 2^n éléments qui sont les parties de E'.

b) Chaque partie de E qui contient x est la réunion d'une partie de $E' = E \setminus \{x\}$ et du singleton $\{x\}$.

Il existe donc autant de parties de E qui ne contiennent pas x, que de parties de $E' = E \setminus \{x\}$, c'est-à-dire 2^n.

On raisonne par disjonction des cas, pour catégoriser les parties de E.
Notons $\mathcal{P}_1$ l'ensemble des parties de E qui contiennent x et $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des parties de E qui ne contiennent pas x.

On a $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ et cette réunion est disjointe par définition de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

D'après 2) a) $\text{card}(\mathcal{P}_1) = \text{card}(E \setminus \{x\}) = 2^n$.
Par définition il est clair que :

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}(E') \quad \text{où} \quad E' = E \setminus \{x\}$$

D'après 2) b), on a $\text{card}(\mathcal{P}_2) = 2^n$

On en déduit par application du principe d'additivité que :

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = \text{card}(\mathcal{P}_1) + \text{card}(\mathcal{P}_2)$$

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

3) Il suffit d'arranger la question 1) (Initialisation) et la question 2) (hérédité), pour avoir une preuve par récurrence :

du nombre d'éléments de l'ensemble des parties de E, $\mathcal{P}(E)$:

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n \quad \text{avec } n = \text{card}(E)$$

Capacité 8 ***Modéliser une situation de dénombrement***

Le site marchand *octet* propose 8 produits à la vente. Un client peut mettre dans son panier au plus un article de chaque produit.
Déterminer le nombre de paniers différents qu'un client peut composer.

En comptant le panier vide, le nombre de paniers que peut composer le client est exactement le nombre de parties d'un ensemble à 8 éléments, c'est-à-dire : $2^8 = 256$.

Capacité 9 ***Dénombrer à l'aide de combinaisons, utilisation de la calculatrice***

1. Sans calculatrice, en utilisant juste la définition, déterminer $\binom{7}{0}$, $\binom{7}{1}$ et $\binom{7}{7}$. Conjecturer les valeurs de $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{n}$ pour n entier naturel.
2. Consulter dans le tableau page 18 du manuel Indice, la séquence de touches pour obtenir $\binom{n}{k}$ avec sa calculatrice. Calculer $\binom{35}{3}$ avec la calculatrice. Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte d'une classe de 35 élèves.
3. Un championnat est constitué de 38 matchs. Lors d'un match, deux issues sont possibles : la victoire ou la défaite.
   a. Déterminer le nombre de façons de gagner 30 matchs sur 38.
   b. Déterminer le nombre de façons de perdre 8 matchs sur 38.

   c. Déterminer la probabilité de gagner exactement la moitié des matchs disputés.

1) $\binom{7}{0} = 1$ $\quad \binom{7}{1} = 1$ $\quad \binom{7}{7} = 1$

2)

deg CALCULATION

Toolbox

binomial(n,k)
Combination

permute(n,r)
Permutation

deg CALCULATION

$\binom{35}{3}$ 6545

3) a) Il existe $\binom{38}{30} = 48\,903\,492$ façons de gagner 30 matchs sur 38

deg CALCULATION

$\binom{35}{3}$ 6545

$\binom{38}{30}$ 48903492 ≈ 4.890349E7

$\binom{38}{8}$ 48903492 ≈ 4.890349E7

b) Il existe $\binom{38}{8} = 48\,903\,492$ façons de perdre 8 matches sur 38.

Sans surprise $\binom{38}{8} = \binom{38}{30}$ car perdre 8 matchs c'est en gagner 30 (match nul exclu).

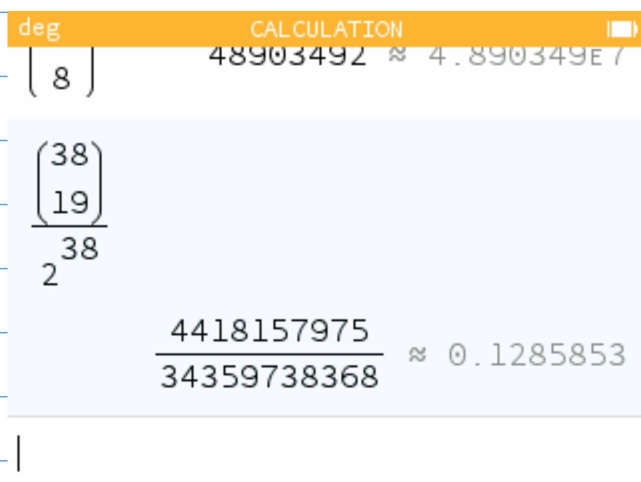
c) La probabilité de gagner exactement la moitié des matchs disputés est égale à :

$$\frac{\binom{38}{19}}{2^{38}}$$

$\binom{38}{19} \to$ nombre d'issues favorables

$2^{38} \to$ nombre d'issues possibles

Notons que le nombre d'issues possibles est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ où E est l'ensemble des 38 matchs. Une partie de E est le choix pour chaque match d'un résultat.



Capacité 10 ***Dénombrer à l'aide de combinaisons***

Une urne contient quatre boules rouges numérotées de 1 à 4 et, trois boules bleues numérotées de 1 à 3 et deux boules blanches numérotées de 1 à 2. On tire simultanément trois boules de cette urne.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Déterminer le nombre de tirages contenant trois boules de la même couleur.
3. Déterminer le nombre de tirages contenant au moins une boule rouge.
4. Déterminer le nombre de tirages contenant exactement un seul numéro pair.

1) On tire simultanément 3 boules dans une urne de 9 boules donc le nombre de tirages est $\binom{9}{3}=84$ le nombre de parties à 3 éléments d'un ensemble à 6 éléments.

2) Trois boules de la même couleur peuvent être trois boules rouges ou trois boules bleues.
Il existe $\binom{4}{3}=4$ parties à 3 éléments d'un ensemble à 4 éléments donc 4 tirages de 3 boules rouges.
De même, il existe $\binom{3}{3}=1$ tirage de 3 boules bleues.
Les ensembles de tirages de 3 boules bleues ou 3 boules rouges sont disjoints donc par principe d'additivité, on a :

$$\binom{4}{3}+\binom{3}{3} = 4+1=5$$ tirages de 3 boules de même couleur

3) Pour déterminer le nombre de tirages contenant au moins une boule rouge on peut déterminer le nombre d'éléments de l'ensemble

complémentaire : "Tirer 3 boules bleues ou blanches"
(dans l'ensemble des tirages de 3 boules)
Ce dernier a pour cardinal $\binom{3+2}{3} = \binom{5}{3} = 10$
Donc l'ensemble cherché a pour cardinal :

$$\binom{7}{3} - \binom{5}{3} = 84 - 10 = 74$$

4) Soit P l'ensemble des tirages avec un seul numéro pair.

On a $P = \underset{\text{2 rouge}}{R_2} \cup \underset{\text{4 rouge}}{R_4} \cup \underset{\text{2 bleu}}{B_2} \cup \underset{\text{2 blanc}}{W_2}$

Par principe d'additivité, on a :

$$\text{card}(P) = \text{card}(R_2) + \text{card}(R_4) + \text{card}(B_2) + \text{card}(W_2)$$

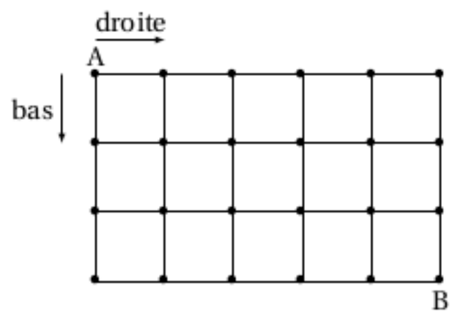
Les 4 ensembles R_2, R_4, B_2, W_2 ont le même nombre d'éléments qui est le nombre de combinaisons de 2 éléments (2 impairs) parmi les 5 impairs.

On en déduit que $\text{card}(P) = 4 \times \binom{5}{2} = 4 \times 10 = 40$

Capacité 11 *Calculs de combinaisons*

1. Un domino est une petite plaquette portant 2 numéros de 0 à 6 représentés par des points, sauf le zéro (blanc). Un domino peut comporter 2 numéros identiques, on dit qu'il est double. Déterminer le nombre de pièces distinctes dans un jeu de dominos.

2. Une fourmi se trouve au point A. Elle peut se déplacer d'un noeud à l'autre du quadrillage en allant uniquement vers la droite ou vers le bas. Déterminer le nombre de chemins qui lui permettront d'aller du point A au point B.



3. On donne ci-dessous la composition d'une classe de 30 élèves de terminale selon le choix des spécialités Mathématiques ou Physique.

   Pour l'activité *acrogym* du cours d'EPS, le professeur constitue des groupes de 4 élèves.

   a. Déterminer le nombre de groupes constitués de 4 élèves suivant la spécialité Mathématiques

   b. Déterminer le nombre de groupes constitués de 4 élèves suivant la même spécialité : Physique ou Mathématiques.

   c. Déterminer le nombre groupes constitués exactement de 2 élèves en spécialité Mathématiques et 2 élèves en spécialité Physique.

1) On a déjà 7 dominos doubles.
Le nombre de dominos distincts est égal au nombre de combinaisons de 2 éléments pris parmi 7, soit $\binom{7}{2}$.

Finalement, on a :

$$7+\binom{7}{2} = 7+\frac{7\times 6}{2} = 28 \text{ dominos distincts.}$$

2) Un chemin est constitué de 5 déplacements vers la droite et 3 déplacements vers le bas.

1	2	3	4	5	6	7	8

Considérons ces 8 déplacements successifs comme les cases numérotées d'un ruban.
Si on choisit de colorier en blanc les cases correspondant à un déplacement vers le bas et en rouge les autres, alors il existe autant de déplacements que de combinaisons de 3 éléments parmi 8, c'est-à-dire de façons de colorier 3 cases du ruban en blanc.

Ce nombre est de $\binom{8}{3} = 56$

3) a) Le nombre de groupes possibles constitués de 4 élèves en spécialité Mathématiques est le nombre de combinaisons de 4 élèves choisis parmi les 20 en spécialité mathématiques, c'est-à-dire $\binom{20}{4} = 4845$.

b) L'ensemble des groupes constitués d'élèves suivant tous la spécialité mathématiques ou tous la spécialité physique s'obtient par principe d'additivité en ajoutant les nombres d'éléments des ensembles de 4 élèves en spé Maths et de 4 élèves en spé physique.

C'est donc $\binom{20}{4} + \binom{18}{4} = 7905$

c) Un groupe constitué d'exactement 2 élèves en spé Maths et 2 élèves en spé Physique est un 2-uplet constitué d'un couple de 2 élèves en spé Maths et d'un couple de 2 élèves en spé Physique.

Si on note M_2 le nombre de couples d'élèves en spé Maths et P_2 le nombre de couples d'élèves en spé Physique alors l'ensemble qui nous intéresse est le produit cartésien $M_2 \times P_2$.

Par principe multiplicatif, on a :

$$\mathrm{card}(M_2 \times P_2) = \mathrm{card}(M_2) \times \mathrm{card}(P_2)$$

$$\mathrm{card}(M_2 \times P_2) = \binom{20}{2} \times \binom{18}{2} = 29070.$$

Capacité 12 ***Coefficients binomiaux***

Soit a et b deux réels.

1. Développer et réduire $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ puis $(a+b)^4$.

   Comparer les coefficients obtenus avec ceux du triangle de Pascal.

2. Démontrer par récurrence, à l'aide de la relation de Pascal, que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

À cause de cette relation, dite du *binôme de Newton*, on qualifie les $\binom{n}{k}$ de coefficients binomiaux.

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Si on dispose les coefficients en ligne en les prenant dans l'ordre décroissant des exposants $a^k b^{n-k}$ avec $n \geq k \geq 0$, on retrouve les coefficients du triangle de Pascal.

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

2) Soit a et b deux réels.

. Pour tout entier naturel n non nul, on définit la propriété :

$$P_n : \text{"}(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\text{"}$$

Démontrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

<u>Initialisation :</u> $(a+b)^0 = 1$

et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \times 1 = 1$

P_0 est donc vraie

<u>Hérédité :</u> Soit un entier $n \geq 0$ tel que P_n est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

On multiplie les deux membres par a+b :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$(a+b)^{n+1} = a \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

donc $$(a+b)^{n+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n+1-(k+1)}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

On effectue un changement d'indice dans la première somme en remplaçant $k+1$ par u

$0 \leq k \leq n \iff 1 \leq k+1 \leq n+1 \iff 1 \leq u \leq n+1$

On en déduit que :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{u=1}^{n+1} \binom{n}{u-1} a^{u} b^{n+1-u}$$
$$+ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k} b^{n+1-k}$$

On peut renommer k par u dans la $2^{ème}$ somme :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{u=1}^{n+1} \binom{n}{u-1} a^{u} b^{n+1-u}$$
$$+ \sum_{u=0}^{n} \binom{n}{u} a^{u} b^{n+1-u}$$

En regroupant les termes, il vient :

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0} a^{0} b^{n+1-0}$$
$$+ \sum_{u=1}^{n} \left(\binom{n}{u} + \binom{n}{u-1} \right) a^{u} b^{n+1-u}$$
$$+ \binom{n}{n} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)}$$

On peut appliquer la relation de Pascal :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Il vient alors en remplaçant aussi $\binom{n}{0} = 1$ par $\binom{n+1}{0} = 1$

et $\binom{n}{n} = 1$ par $\binom{n+1}{n+1} = 1$:

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1-0}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$+ \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)}$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

On en déduit que P_{n+1} est vraie et que la propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété P_n est initialisée pour $n=0$ et elle est héréditaire, donc elle est vraie par récurrence pour tout entier $n \geq 0$.