Preuve du TVI "par dichotomie"

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$.

Démontrons que pour tout réel $k \in [f(a) ; f(b)]$ il existe un unique $\alpha \in [a ; b]$ tel que $f(\alpha) = k$.

On considère deux suites (a_n) et (b_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} \bullet\ a_0 = a \quad \text{et} \quad b_0 = b \\ \bullet\ \text{si } f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \geq k \text{ alors } \begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases} \\ \text{et sinon } \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases} \end{cases}$$

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, la propriété :

P_n : " $f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$ et $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ et $a \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b$ " est vraie

Initialisation : Pour $n = 0$, on a :

$f(a_0) = f(a)$ et $f(b_0) = f(b)$

et par hypothèse $f(a) \leq k \leq f(b)$

donc $f(a_0) \leq k \leq f(b_0)$

De plus on a $a_1 = \frac{a+b}{2}$ et $b_1 = b_0$

ou $b_1 = \frac{a+b}{2}$ et $a_1 = a_0$.

Dans les deux cas, on a : $a \leq a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0 \leq b$
et $b_0 - a_0 = \frac{b-a}{2^0}$. Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit un entier $n \geq 0$ tel que P_n est vraie.

Par hypothèse de récurrence on a :

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

Or on a $b_{n+1} - a_{n+1} = \begin{cases} \frac{b_n + a_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \\ b_n - \frac{b_n + a_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2} \end{cases}$

donc $\boxed{b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b-a}{2^{n+1}}}$

Ensuite par hypothèse de récurrence, on a

$$f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$$

si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq k$ alors $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$

sinon $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$

Dans les deux cas on a : $\boxed{f(a_{n+1}) \leq k \leq f(b_{n+1})}$

De plus par hypothèse de récurrence, on a : $0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b$

On a $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$ et $b_{n+2} = b_{n+1}$

ou $a_{n+2} = a_{n+1}$ et $b_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$

Puisque $a_{n+1} \leq \dfrac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} \leq b_{n+1}$,

dans les 2 cas, on a :

$a \leq a_n \leq a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b$

donc $\boxed{a \leq a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1} \leq b}$

donc P_{n+1} est vraie.

<u>Conclusion</u> : P_n est initialisée et héréditaire donc elle est vraie par récurrence pour tout entier $n \geq 0$

On a démontré que pour tout entier $n \geq 0$, on a :

(1) $a \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b$

(2) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

(3) et $f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$

De la première inégalité, on déduit que (a_n) est croissante et majorée par b donc converge d'après le théorème de convergence monotone.

De même (b_n) est décroissante et minorée par a, donc converge d'après le théorème de convergence monotone.

Notons $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ et $\beta = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$

De l'inégalité (2), sachant que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$, on déduit que $\alpha = \beta$.

(3) Enfin, par continuité de f sur $[a;b]$, sachant que $a \leq \alpha \leq b$ (par passage à la limite dans $a \leq a_n \leq b$), on déduit d'une propriété du cours

que $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(\alpha)$

et $\lim_{n \to +\infty} f(b_n) = f(\beta) = f(\alpha)$

Comme pour tout entier $n \geq 0$, on a d'après l'inégalité (3) :

$$f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$$

en passant à la limite, il vient :

$$f(\alpha) \leq k \leq f(\alpha)$$

et donc $f(\alpha) = k$.

On a ainsi prouvé l'existence d'un $\alpha \in [a ; b]$ tel que $f(\alpha) = k$ (mais pas son unicité)

Notons que (a_n) et (b_n) sont des suites dites adjacentes.