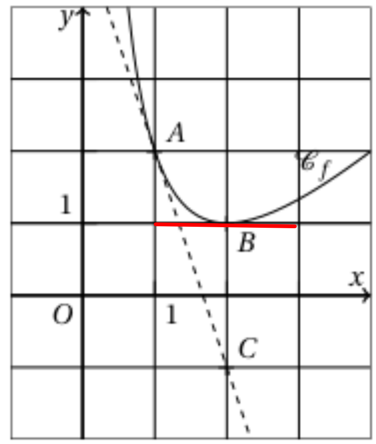
Dérivation et convexité
Corrigé des exemples du cours

Capacité 1 ***Déterminer graphiquement un nombre dérivé et une équation de tangent***

On considère une fonction f définie sur $]0; +\infty[$ et dérivable en 1 et en 2. On a représenté ci-dessous la courbe de f et ses tangentes aux points A et B d'abscisses respectives 1 et 2.



1. Le nombre dérivé de f en 2 a pour valeur :

   a. 2 **b.** 1 **c.** 0 **d.** $\frac{1}{2}$

2. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A est :

   a. $y = -\frac{1}{3}x + 2$ **b.** $y = 3x + \frac{5}{3}$ **c.** $y = 5 - 3x$ **d.** $y = -3x + \frac{5}{3}$

1) La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses, donc son coefficient directeur est nul. Ainsi $f'(2) = 0$

2) La tangente au point d'abscisse 1 passe par les points $A(1;2)$ et $C(2;-1)$.
Son coefficient directeur est donc $m = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$

$$m = \frac{-1-2}{2-1} = -3$$

Une équation de (AC) est donc de la forme $y = -3x + p$
A appartient à (AC) donc $2 = -3 + p \iff p = 5$.

Une équation de la tangente (AC) en A est donc :

$$y = -3x + 5$$

Capacité 2 *Utiliser la définition du nombre dérivé*

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

   On rappelle que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, on a $f'(x) = f(x)$.

   On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère du plan.

   a. À l'aide d'un nombre dérivé calculé en un point bien choisi, démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

   b. La droite d'équation $y = ex$ est-elle tangente à $\mathscr{C}_f$?

2. Est-il vrai que si une fonction g est définie sur un intervalle I alors g est dérivable sur I?

1)

a) $f : x \mapsto e^x$ est dérivable en 0, donc par définition, on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = f'(0)$$

Or on a $f'(0) = e^0 = 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1}$

b) Soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ex$.

$\mathcal{D}$ est une tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a si et seulement $f'(a)$ est égal au coefficient directeur de $\mathcal{D}$ c'est-à-dire e.

Pour tout réel a, on a $f'(a) = e^a$

On résout l'équation :

$$e^a = e \iff a = 1$$

De plus la droite $\mathcal{D}$ passe par le point d'abscisse 1 de $\mathscr{C}_f$, car ses coordonnées $(1 ; e)$ vérifient l'équation de $\mathcal{D}$.

Ainsi la droite d'équation $y = ex$ est tangente à $\mathcal{C}_f$.

2) La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie en 0 mais pas dérivable en 0.
Ces contre-exemples prouvent qu'une fonction définie sur un intervalle I, n'est pas nécessairement dérivable sur I.

Capacité 3 ***Dériver une somme, un produit, un inverse ou un quotient de fonctions dérivables***

Soit les fonctions f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x, on a :

$$f(x) = \frac{x^6}{3} - 2x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = e^x + e$$

Déterminer les expressions des dérivées des fonctions suivantes qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$:

1. $f \times g$ **2.** g^2 **3.** $\frac{-2}{g}$ **4.** $\frac{f}{g}$

f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{3} \times 6x^5 - 2 = 2x^5 - 2 \text{ et } g'(x) = e^x$$

1) $f \times g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$$

Pour tout réel x, on a donc :

$$(f\times g)'(x) = f'(x)\times g(x) + f(x)\times g'(x)$$

$$\boxed{(f\times g)'(x) = (2x^5-2)(e^x+e) + \left(\frac{x^6}{3}-2x+1\right)e^x}$$

2) $(g^2)' = g'g + gg' = 2g'g$

Pour tout réel x, on a donc :

$$\boxed{(g^2)'(x) = 2e^x\times(e^x+e)}$$

3) $\left(-\frac{2}{g}\right)' = -2\times\frac{-g'}{g^2} = \frac{2g'}{g^2}$

Rque : $-\frac{2}{g}$ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\left(-\frac{2}{g}\right)'(x) = \frac{2g'(x)}{g^2(x)} = \frac{2e^x}{(e^x+e)^2}}$$

4) $\frac{f}{g}$ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\times g(x) - f(x)\times g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{(3x^5-2)\,(e^x+e) - \left(\frac{x^6}{3}-2x+1\right)e^x}{(e^x+e)^2}}$$

Capacité 4 ***Appliquer la formule de dérivation d'une fonction composée***

1. Déterminer une expression de la fonction dérivée de la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $h(x) = \left(e^{-x}+e^{x}\right)^4$.

2. Déterminer une expression de la fonction dérivée de la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{1}{\left(x^4+e^{-2x}\right)^3}$.

3. On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{x^2+1}\,e^{\sqrt{x^2+1}}$.
   Retrouver l'expression de $f'(x)$, déterminée ci-dessous avec un logiciel de calcul formel.

```
In [42]: fx = sqrt(x ** 2 + 1) * exp(sqrt(x ** 2 + 1))

In [43]: fx
```

Out[43]: $\sqrt{x^2+1}\,e^{\sqrt{x^2+1}}$

```
In [44]: factoriser(dérivée(fx, x))
```

Out[44]: $\dfrac{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$

1). h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (e^{-x}+e^{x})^4$

- $h = u^4$ avec $u(x) = e^{-x}+e^{x}$

- h dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

- $h' = 4u'u^{4-1} = 4u'u^3$

Pour tout réel x, $u'(x) = -e^{-x} + e^{x}$

donc $\boxed{h'(x) = 4(e^{x} - e^{-x})(e^{-x} + e^{x})^3}$

2) g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{(x^4 + e^{-2x})^3}$

$g = \dfrac{1}{u^3}$ avec $u(x) = x^4 + e^{-2x}$

g dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$g' = \frac{-3u'}{u^{3+1}} = \frac{-3u'}{u^4}$$

Pour tout réel x, on a $u'(x) = 4x^3 - 2e^{-2x}$

donc $\boxed{g'(x) = \dfrac{-3(4x^3 - 2e^{-2x})}{(x^4 + e^{-2x})^4}}$

3) Soit f la fonction définie pour tout réel x, par :

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}\, e^{\sqrt{x^2+1}}$$

$f = \sqrt{u}\, e^{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = \sqrt{x^2+1}$

f dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de composées de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f' = (\sqrt{u})' \, e^{\sqrt{u}} + \sqrt{u} \times \left(e^{\sqrt{u}}\right)'$$

$$f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \times e^{\sqrt{u}} + \sqrt{u} \times \frac{u'}{2\sqrt{u}} \, e^{\sqrt{u}}$$

Pour tout réel x, on a $u'(x) = 2x$

donc $$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \times e^{\sqrt{x^2+1}} + \sqrt{x^2+1} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \times e^{\sqrt{x^2+1}}$$

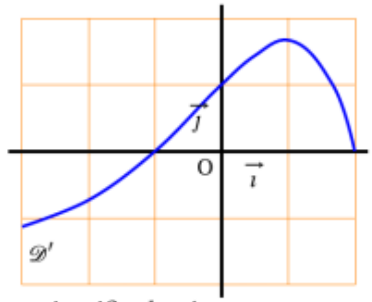
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \times e^{\sqrt{x^2+1}} + x e^{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\boxed{f'(x) = x e^{\sqrt{x^2+1}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + 1 \right)}$$

Capacité 5 *Exploiter le lien entre signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction*

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère une fonction f dérivable sur $[-3\ ;\ 2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathscr{D}'$ ci-contre.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leqslant 0$.
2. La fonction f est décroissante sur l'intervalle ~~[2 ; 3]~~ $[1\ ;\ 2]$
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, $f(x) \geqslant -1$.

1) Graphiquement, on peut donner le tableau de signes de f' :

x	-3		-1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0

Pour tout réel $x \in [-3;-1]$, on a donc bien $f'(x) \leq 0$

2) Sur l'intervalle $[1;2]$ on a f' strictement positive sauf en 2 donc f est strictement croissante sur $[1;2]$ et donc pas décroissante sur $[1;2]$

3) Du tableau de signe de f', on peut déduire le tableau de variations de f :

x	-3		-1	0	2
$f(x)$		$\searrow$	$f(-1)$	$f(0) = -1$ $\nearrow$	

f est strictement croissante sur $[-1;0]$
donc pour tout $x \in [-1;0[$, on a :

$$f(x) < f(0) = -1$$

En particulier, on a $f(-1) < -1$.
Par conséquent l'affirmation :
"$\forall x \in [-3;2]$, $f(x) \geq -1$" est fausse

Capacité 6 ***Utiliser la dérivée seconde et les dérivées d'ordre supérieur***

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^5 + 5x^4 + 15x$.

   a. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer f' et f''.

   b. Étudier les variations de f' sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(-1)$.

   c. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. On admet que la fonction f définie sur $\mathcal{D} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est n fois dérivable sur $\mathcal{D}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

   Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x \neq 0$, on a :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cancel{(n-1)!}\, n!}{x^{n+1}} \quad \text{avec} \quad \cancel{(n-1)! = (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1}$$

$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$ et $0! = 1$

1) a) f dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on a :

$$f(x) = 3x^5 + 5x^4 + 15x$$

donc $\boxed{f'(x) = 15x^4 + 20x^3 + 15}$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$\boxed{f''(x) = 60x^3 + 60x^2 = 60x^2(x+1)}$$

Pour tout réel x, on a $60x^2 \geqslant 0$ donc f''

donc $f''(x)$ est du signe de $x+1$

b) On en déduit le signe de f'' et les variations de f' :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	$f'(-1)$	$\nearrow$		$\nearrow$	

On a $f'(-1) = 15\times(-1)^4 + 20\times(-1)^3 + 15$
$f'(-1) = 15 - 20 + 15 = 10$

D'après le tableau de variations de f', le minimum de f' sur $\mathbb{R}$ est $f'(-1) = 10$.
On en déduit que pour tout réel x, on a :

$$f'(x) > 0.$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout entier $n \geq 0$, on définit la propriété :

$$P_n : \text{" } \forall x \neq 0,\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

Démontrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Initialisation : Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$f^{(1)}(x) = \frac{-1}{x^2} = \frac{(-1)^1 \, 1!}{x^{1+1}}$$

donc P_1 est vraie

Hérédité : Soit un entier $n \geq 1$ tel que P_n est vraie.

Par hypothèse de récurrence, pour tout réel $x \neq 0$, on a :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \, n!}{x^{n+1}}.$$

On dérive :

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \quad n! \quad \times \frac{(-1)(n+1)x^n}{(x^{n+1})^2}$$

donc $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} (n+1)! \times \frac{1}{x^{n+2}}$

On en déduit que P_{n+1} est vraie

Conclusion : La propriété P_n est initialisée pour $n = 1$ et elle est héréditaire, donc elle est vraie par récurrence pour tout entier $n \geq 1$.

Capacité 7 ***Déterminer graphiquement la convexité d'une fonction***

1. Par lecture graphique de leur courbe (représentée si besoin avec la calculatrice), conjecturer la convexité des fonctions suivantes :

a. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

b. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x^2$.

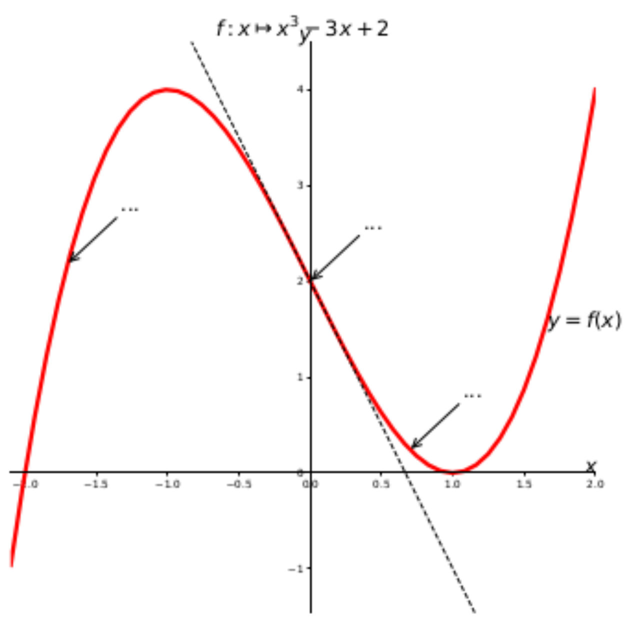
c. h définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x}$.

d. m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = e^x$.

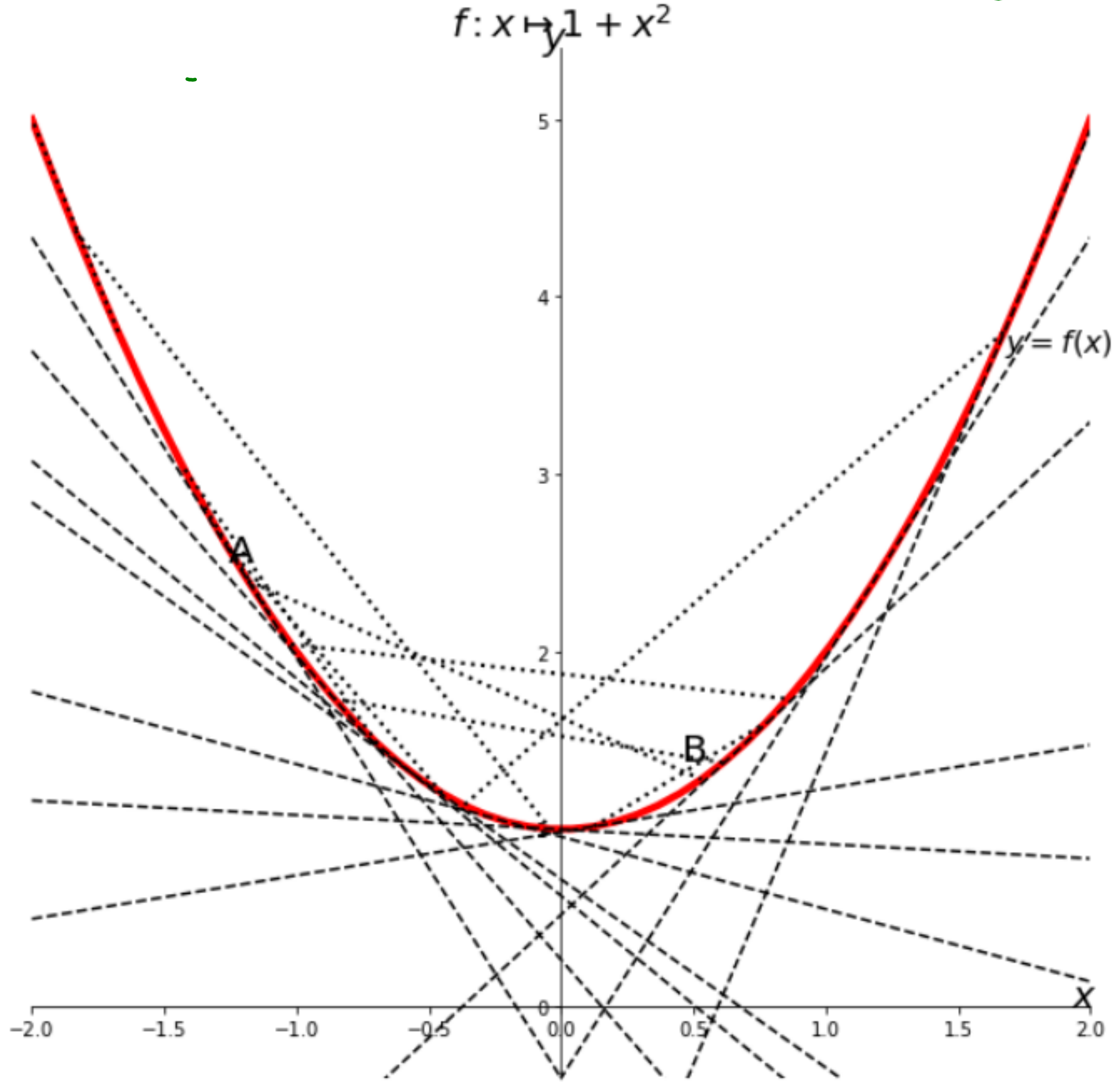
e. c définie sur $\mathbb{R}$ par $r(x) = x^3$.

2. Si f est une fonction convexe sur un intervalle I, que peut-on dire de la fonction $-f$?

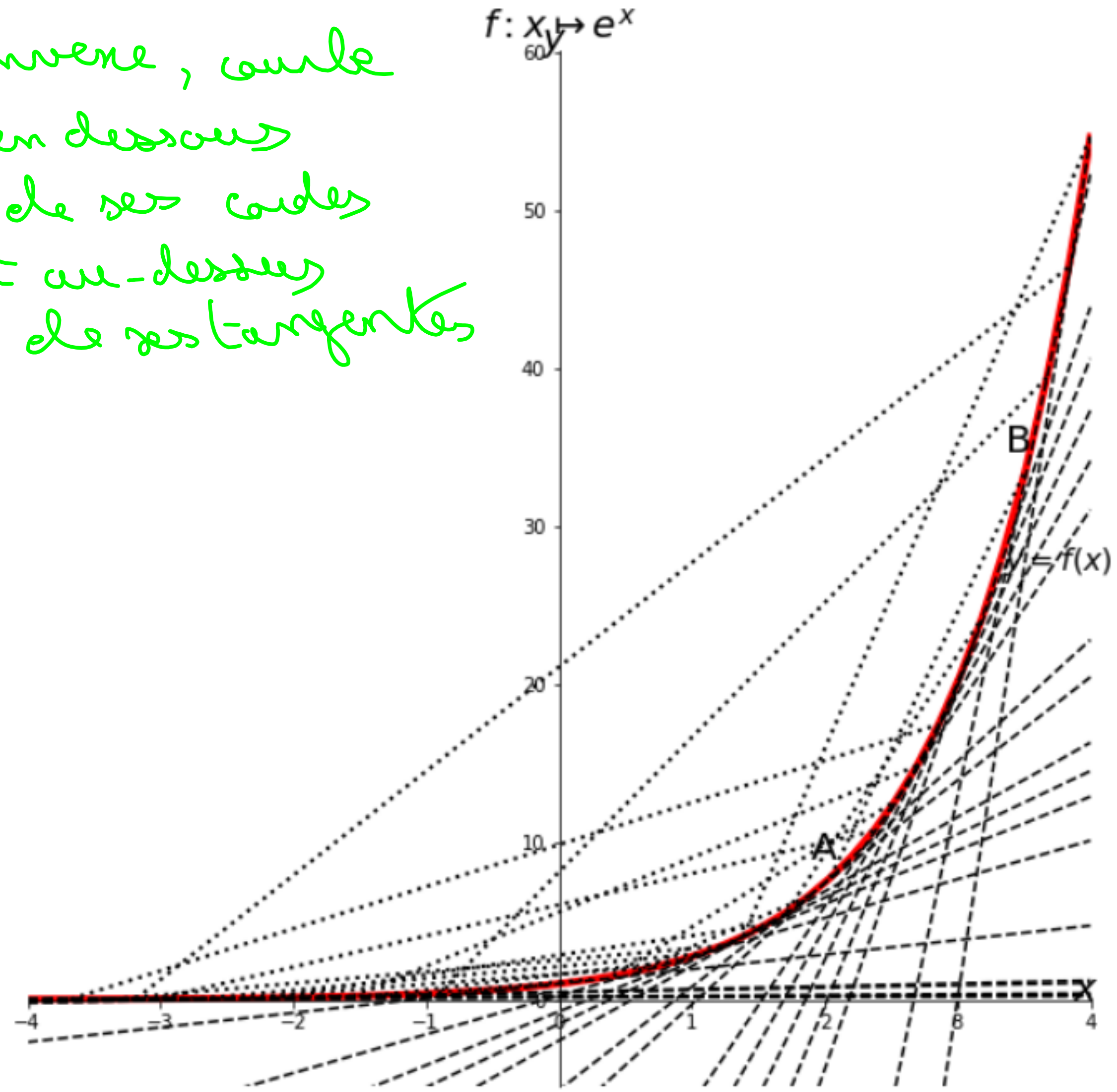
3. On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x + 2$ et sa tangente au point d'abscisse 0. Compléter le graphique ci-dessous en indiquant convexité et point d'inflexion.



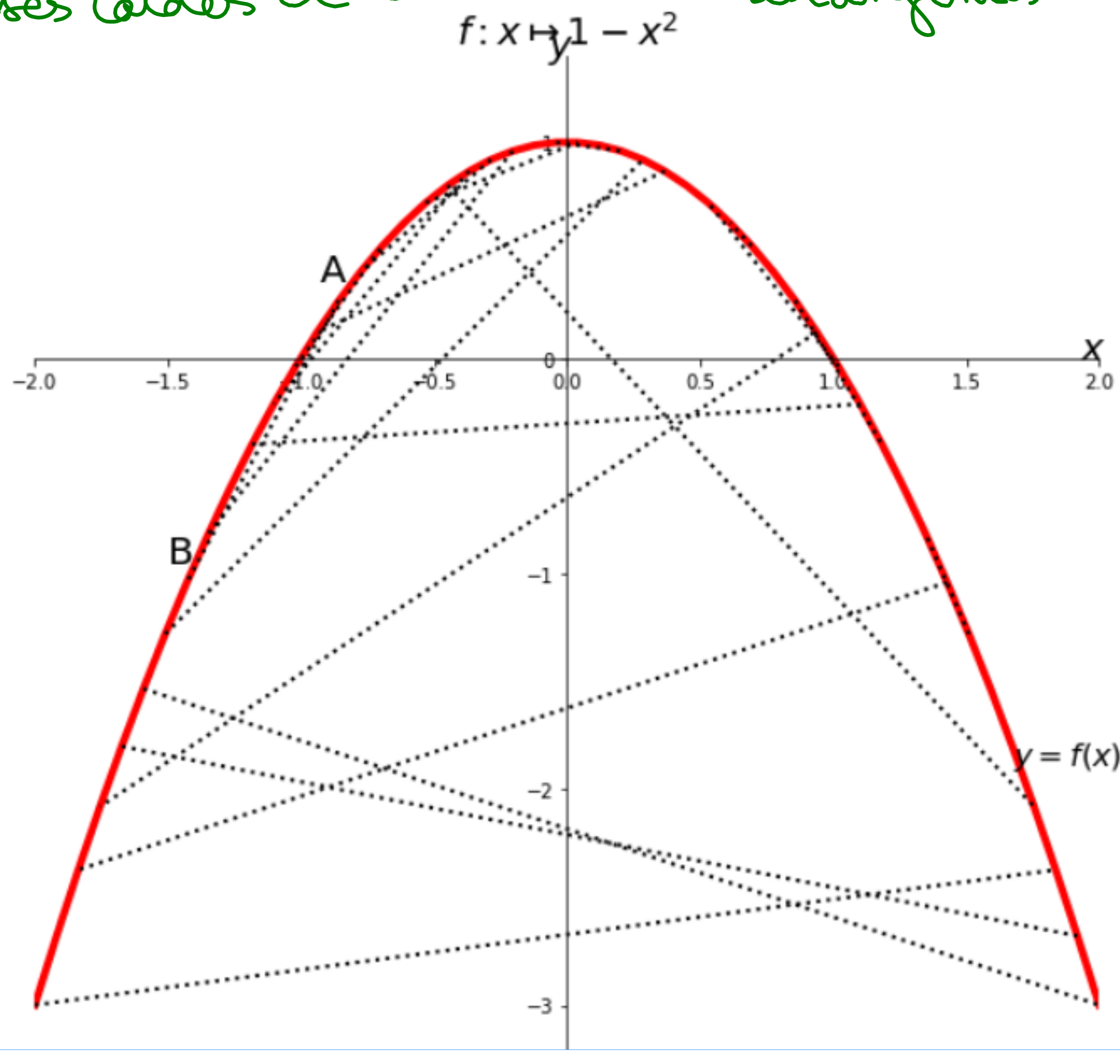
Fonction convexe, courbe en dessous de ses cordes et au-dessus de ses tangentes

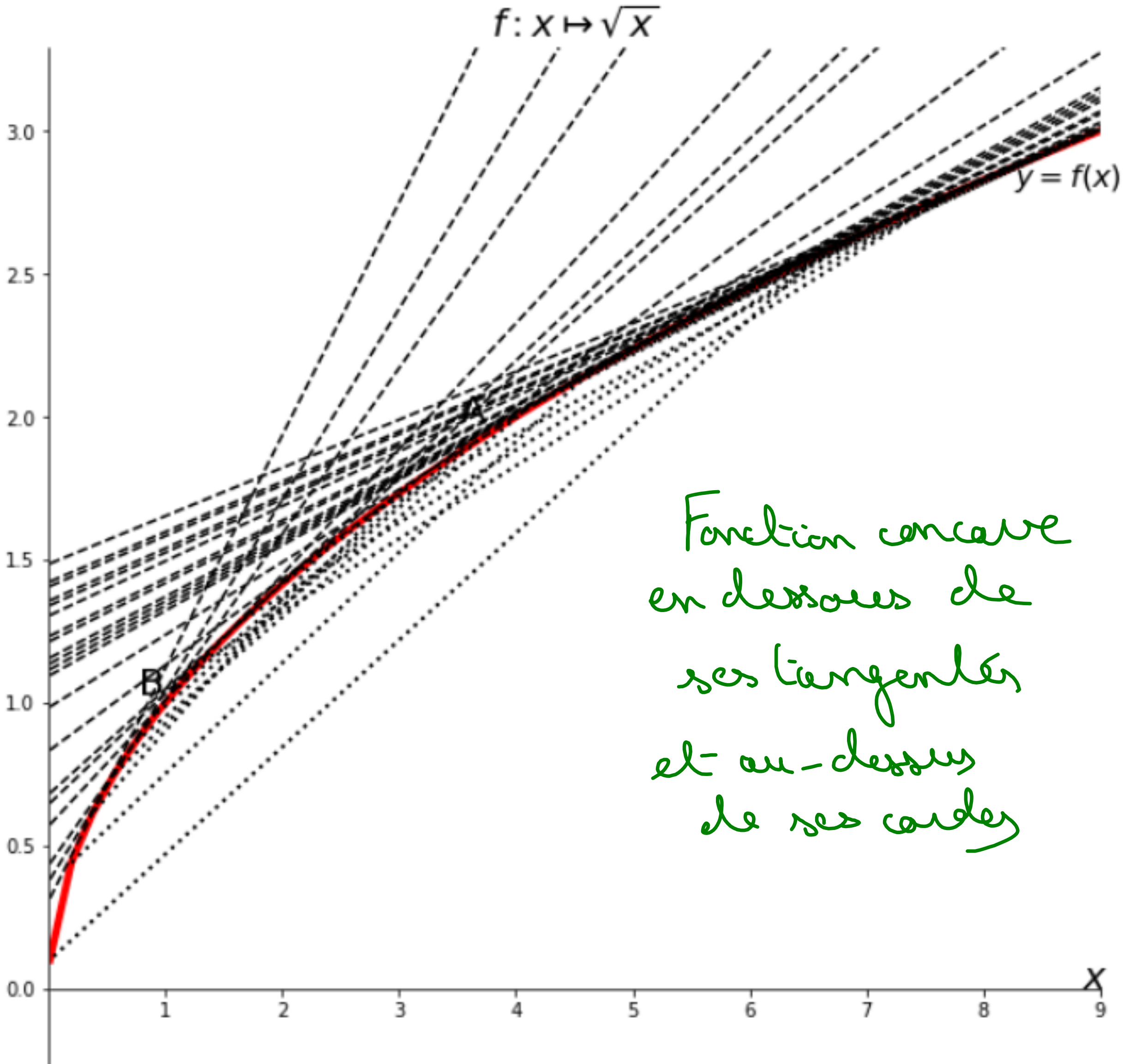


fonction convexe, courbe
en dessous
de ses cordes
et au-dessus
de ses tangentes

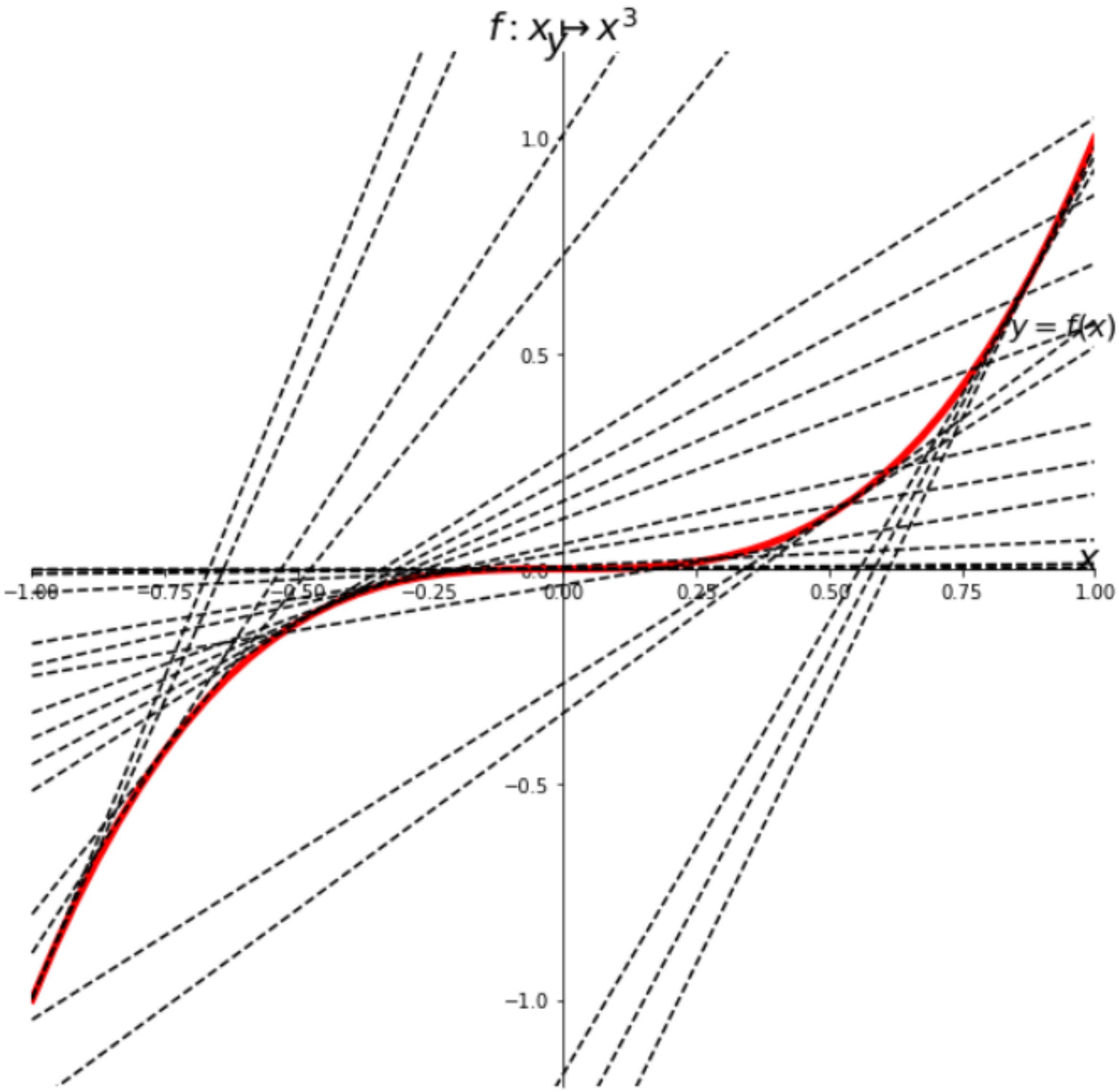


Fonction concave, courbe au-dessus de ses cordes et en dessous de ses tangentes.





Fonction concave
en dessous de
ses tangentes
et au-dessus
de ses cordes

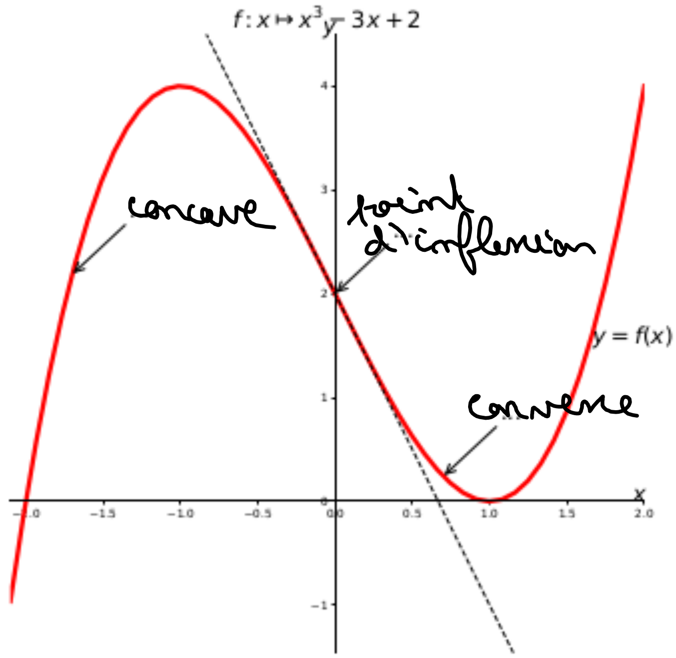


$f: x \mapsto x^3$ concave sur $]-\infty;0]$

$f: x \mapsto x^3$ convexe sur $[0;+\infty[$

2) Si f convexe sur I alors $-f$ concave sur I car la courbe de $-f$ est la symétrique de celle de f par rapport à l'axe des abscisses.

3)



Capacité 8 ***Lien entre convexité et sens de variation***

Compléter les phrases :

- Si f est convexe et croissante sur un intervalle I, alors f croît de plus en plus ..vite
- Si f est convexe et décroissante sur un intervalle I, alors f décroît de plus en plus ..lentement
- Si f est concave et croissante sur un intervalle I, alors f croît de plus en plus ..lentement
- Si f est concave et décroissante sur un intervalle I, alors f décroît de plus en plus ..vite

Capacité 9 ***Esquisser $\mathscr{C}_f$ à partir des tableaux de variations de f, f' ou f'', voir capacité 6 p.207***

1. On considère une fonction f deux fois dérivable sur $[-5;5]$ dont on donne ci-dessous le tableau de variations ainsi que le tableau de variations de sa dérivée f' :

x	-5		-2		2		5
$f(x)$	-1	↗	3	↘	-2	↗	0

erreur
$f'(x)$

x	-5		0		3		5
$\cancel{f''(x)}$	3	↘	-2	↗	2	↘	0
		concave		convexe		concave	

Déterminer la convexité de la fonction f et tracer dans un repère une courbe possible pour f.

2. On considère une fonction g deux fois dérivables sur $[-2;6]$, dont on donne ci-dessous les tableaux de variations de g et g''.

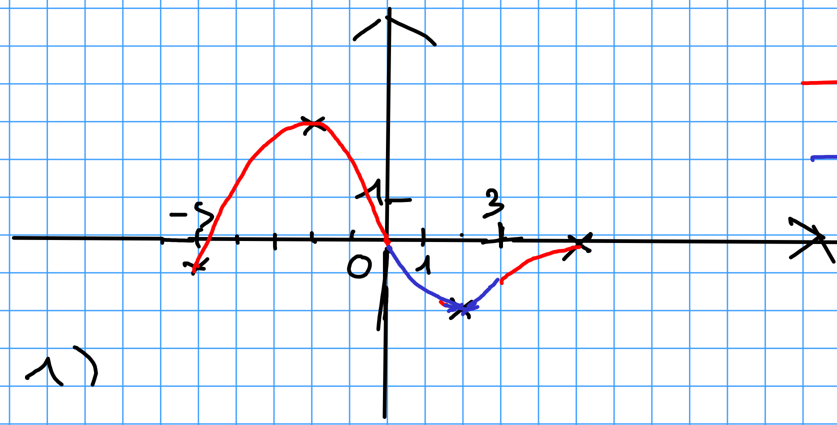
		convexe		concave			convexe	
x	-2		0		3		4		6
$g''(x)$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	2

x	-2		-1		0		2		4		6
$g(x)$	1	↘	-4	↗	3	↗	5	↘	2	↘	0

Déterminer la convexité de la fonction g et tracer dans un repère une courbe possible pour g.

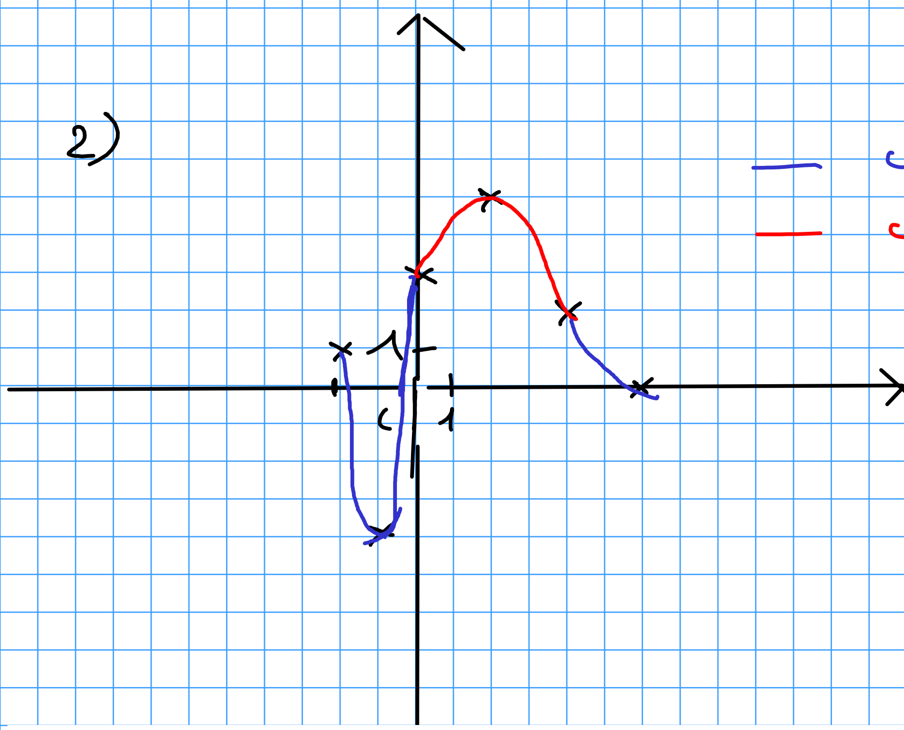
1) • f' décroissante sur $[-5;0]$ et $[3;5]$ donc f concave sur ces intervalles.
• f' croissante sur $[0;3]$ donc f convexe sur cet intervalle.

1)



— f concave
— f convexe

2)

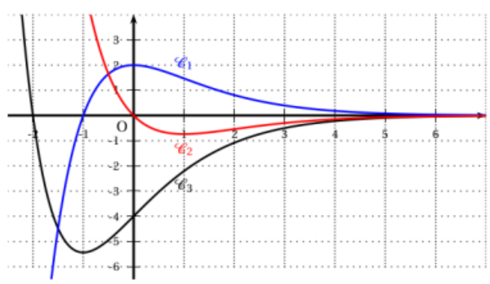


— convexe
— concave

Capacité 11 ***Lier une représentation graphique de f, f' ou f''***

On considère une fonction f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ont été représentées. L'une de ces courbes représente la fonction f, une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde. Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f.



2. On admet que pour tout réel x, on a $f(x) = (-2x-4)\mathrm{e}^{-x}$.

   a. Déterminer des expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x.

   b. En déduire l'étude de la convexité de f et des éventuels points d'inflexions de sa courbe. Vérifier les conjectures établies à la question 1.

1) $\mathcal{C}_1$ représente f'

$\mathcal{C}_3$ représente f

et $\mathcal{C}_2$ représente f''.

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$			
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$	

f est convexe sur $]-\infty;0]$ et concave sur $[0;+\infty[$ et $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

2) Pour tout réel x, on a $f(x) = (-2x-4)e^{-x}$

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$f(x) = u(x) \times v(x)$ avec u et v dérivables sur $\mathbb{R}$

$u(x) = -2x-4$ $\qquad$ $v(x) = e^{-x}$

$u'(x) = -2$ $\qquad$ $v'(x) = -e^{-x}$

$f' = u'v + uv'$

donc $f'(x) = -2e^{-x} + (-e^{-x})(-2x-4)$

$f'(x) = e^{-x}(-2+2x+4) = e^{-x}(2+2x)$

puis $f''(x) = -e^{-x}(2+2x) + 2e^{-x} = -2xe^{-x}$

On peut alors retrouver les signes de f'' et de f'

et en déduire la convexité et les variations de f.

Capacité 12 ***Démontrer une inégalité de convexité, voir capacité 7 p.208***

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère du plan.

1. Déterminer des expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x puis étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. En déduire que pour tout réel x, on a $e^{-x} \geqslant 1 - x$.
4. Démontrer que pour tous réels a et b, $e^{-\frac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{e^{-a} + e^{-b}}{2}$.

1) f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ donc pour tout réel x :

$f(x) = e^{-x}$

$f'(x) = -e^{-x}$

$f''(x) = e^{-x}$

2) Équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 :

$$y = f'(0) \times (x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = -x+1$$

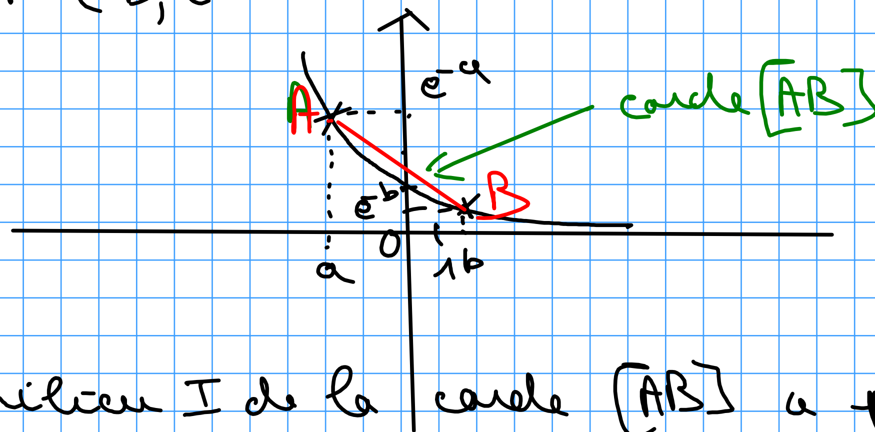
3) Pour tout réel x, on a $f''(x) \geq 0$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$ et donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

On en déduit l'inégalité de convexité : pour tout réel x, $e^{-x} \geqslant 1-x$.

4) f est convexe sur $\mathbb{R}$ donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses cordes.

Considérons la corde $[AB]$ avec $A(a; e^{-a})$

et $B(b; e^{-b})$



Le milieu I de la corde [AB] a pour coordonnées :

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{e^{-a}+e^{-b}}{2} \end{cases} \qquad I\left(\frac{a+b}{2}; \frac{e^{-a}+e^{-b}}{2}\right)$$

Par convexité de f, le point de $\mathcal{C}_f$ de même abscisse que I est en-dessous de I et donc son ordonnée $e^{-\frac{a+b}{2}}$ est inférieure ou égale à celle de I.

On en déduit que : $e^{-\frac{a+b}{2}} \leq \dfrac{e^{-a}+e^{-b}}{2}$