Histoire 1

Johan Jensen (1859 - 1925) est un ingénieur et mathématicien autodidacte danois, qui effectua tous ses travaux mathématiques pendant ses loisirs. Il travailla sur les fonctions convexes et laissa son nom à une inégalité vérifiée par une fonction convexe f et des n-uplets de réels $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $(x_1, \ldots, x_n)$.

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Cette inégalité permet de démontrer, avec la concavité de la fonction logarithme, l'inégalité arithmético-géométrique. Pour tout n-uplet de réels positifs $(x_1, \ldots, x_n)$, on a :

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

1 Rappels sur la dérivation

1.1 Nombre dérivé et tangente

Définition 1

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction définie sur un intervalle I, $\boldsymbol{a}$ un réel appartenant à I et $\boldsymbol{h}$ un réel différent de 0 tel que $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}$ appartient à I.

f est dérivable en a si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$, tend vers un nombre lorsque h tend vers 0.

Ce nombre est le **nombre dérivé** ou **dérivée** de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$, il est noté $\boldsymbol{f'(a)}$.

C'est la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque $\boldsymbol{h}$ tend vers **0** et on note : $\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)}$.

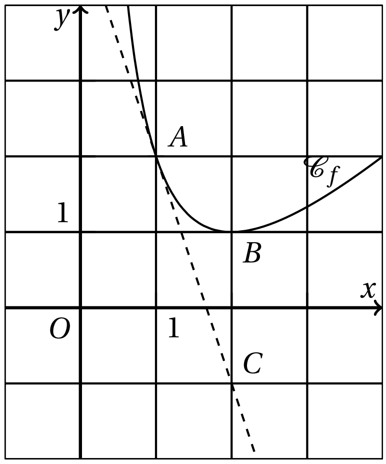
Si $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f(x)}$ on peut utiliser la notation de Leibniz $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pour la dérivée $\boldsymbol{f'(x)}$ de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x}$.

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit a un réel appartenant à I et h un réel non nul tel que $a+h$ appartient à I.
On considère les points $A\left(a; f(a)\right)$ et $M_h\left(a+h; f(a+h)\right)$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère du plan.
Si f **est dérivable en** a, lorsque h tend vers 0, les sécantes (AM_h) à $\mathscr{C}_f$ tendent vers une position limite qui est la droite passant par le point $\mathrm{A}\left(a; f(a)\right)$ et de coefficient directeur $f'(a)$.
Cette droite, « **limite des sécantes** », est appelée **tangente à $\mathscr{C}_f$ en $\mathrm{A}\left(a; f(a)\right)$**.

Capacité 1 ***Déterminer graphiquement un nombre dérivé et une équation de tangente***

On considère une fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ et dérivable en 1 et en 2. On a représenté ci-contre la courbe de f et ses tangentes aux points A et B d'abscisses respectives 1 et 2.



1. Le nombre dérivé de f en 2 a pour valeur :

   a. 2 **b.** 1 **c.** 0 **d.** $\frac{1}{2}$

2. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A est :

   a. $y=-\frac{1}{3}x+2$ **b.** $y=3x+\frac{5}{3}$ **c.** $y=5-3x$ **d.** $y=-3x+\frac{5}{3}$

1.2 Fonction dérivable sur un intervalle

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable en a, une équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est :

$$\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$$

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable en tout point a de I, on dit que f est dérivable sur I, et on appelle **fonction dérivée** de f, notée f', la fonction f' définie par :

$$\boxed{f' : a \longmapsto f'(a)}$$

Capacité 2 ***Utiliser la définition du nombre dérivé***

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$.
   On rappelle que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, on a $f'(x) = f(x)$.
   On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère du plan.
   a. À l'aide d'un nombre dérivé calculé en un point bien choisi, démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.
   b. La droite d'équation $y = \mathrm{e}x$ est-elle tangente à $\mathscr{C}_f$?
2. Est-il vrai que si une fonction g est définie sur un intervalle I alors g est dérivable sur I ?

1.3 Dérivées des fonctions usuelles

f est une fonction dérivable sur $\mathscr{D}$ par rapport à la variable x

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble $\mathscr{D}$ de dérivabilité de f
$f(x) = p$ avec $p \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$ avec $(m, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$f'(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$

TABLE 1 – Dérivées des fonctions usuelles (à compléter en cours d'année)

1.4 Opérations algébriques sur les fonctions dérivables

Soient u et v deux fonctions dérivables par rapport à la variable x sur un intervalle I

Opération sur u et v, $f =$	Fonction dérivée $f' =$	Ensemble de dérivabilité de f
$u + v$	$u' + v'$	I
λu avec $\lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda u'$	I
uv	$u'v + uv'$	I
$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{-v'}{v^2}$	I privé des réels x tels que $v(x) = 0$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	I privé des réels x tels que $v(x) = 0$

TABLE 2 – Opérations algébriques sur les fonctions dérivables

Capacité 3 ***Dériver une somme, un produit, un inverse ou un quotient de fonctions dérivables***

Soit les fonctions f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x, on a :

$$f(x) = \frac{x^6}{3} - 2x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}$$

Déterminer les expressions des dérivées des fonctions suivantes qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$:

1. $f \times g$ **2.** g^2 **3.** $\dfrac{-2}{g}$ **4.** $\dfrac{f}{g}$

1.5 Dérivée d'une fonction composée

Propriété 2 ***Généralisation, propriété admise***

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie en $u(x)$ pour tout x appartenant à I.

- On rappelle que la fonction composée de u suivie de v notée $v \circ u$ est définie pour tout réel $x \in \mathrm{I}$ par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.
- Si u est dérivable sur I et si v est dérivable en $u(x)$ pour tout x appartenant à I, alors la fonction composée $v \circ u$ est dérivable sur I et on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{I},\ (v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))}$$

Corollaire

1. Soit n un entier non nul.

- **<u>Premier cas $n > 0$:</u>**
  Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction u^n est dérivable sur I et on a $\boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}}$.
- **<u>Second cas $n \leqslant -1$:</u>**
  Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et si u ne s'annule pas sur I, alors la fonction composée u^n est dérivable sur I et on a $\boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}}$.

2. Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction composée $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et on a $\boxed{(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}}$.

3. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction composée e^u est dérivable sur I et on a $\boxed{(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u}$.

Démonstration ***Voir page 174 du manuel Indice***

1. On démontre le premier cas : $n > 0$ et u dérivable sur I.

- On décompose la fonction composée u^n.

$$\begin{tikzcd} x \in \mathrm{I} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "g = v \circ u"] & u(x) \arrow[r] & u^n(x) \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{X} \xrightarrow{v} \cdots$$

- On applique la propriété de dérivation d'une fonction composée.

....

....

....

2. Soit u fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, considérons la fonction composée $\sqrt{u}$. *Voir page 176 du manuel Indice pour une autre preuve.*

- On décompose la fonction composée $\sqrt{u}$.

$$\begin{tikzcd} x \in \mathrm{I} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "g = v \circ u"] & u(x) \arrow[r] & \sqrt{u(x)} \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{X} \xrightarrow{v} \cdots$$

- On applique la propriété de dérivation d'une fonction composée.

....

....

....

3. Soit u fonction dérivable sur un intervalle I, considérons la fonction composée e^u.

- On décompose la fonction composée e^u.

$$\begin{tikzcd} x \in \mathrm{I} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "g = v \circ u"] & u(x) \arrow[r] & \mathrm{e}^{u(x)} \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{X} \xrightarrow{v} \cdots$$

- On applique la propriété de dérivation d'une fonction composée.

  ....

  ....

  ....

Capacité 4 ***Appliquer la formule de dérivation d'une fonction composée***

1. Déterminer une expression de la fonction dérivée de la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $h(x) = \left(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}\right)^4$.

2. Déterminer une expression de la fonction dérivée de la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{1}{\left(x^4 + \mathrm{e}^{-2x}\right)^3}$.

3. On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{x^2+1}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}$.

   Retrouver l'expression de $f'(x)$, déterminée ci-dessous avec un logiciel de calcul formel.

```
In [42]: fx = sqrt(x ** 2 + 1) * exp(sqrt(x ** 2 + 1))

In [43]: fx
```

Out[43]: $\sqrt{x^2+1}e^{\sqrt{x^2+1}}$

```
In [44]: factoriser(dérivée(fx, x))
```

Out[44]: $\dfrac{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$

1.6 Du signe de la dérivée au sens de variation de la fonction

Théorème 1 ***admis***

Soit f une fonction monotone et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Compléter par $\leqslant$, $=$ *ou* $\geqslant$.

- Si f est croissante sur I alors pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a $f'(x) \cdots 0$.
- Si f est décroissante sur I alors pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a $f'(x) \cdots 0$.

Théorème 2 ***admis, réciproque du précédent***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Compléter par $\leqslant$, $=$ *ou* $\geqslant$.

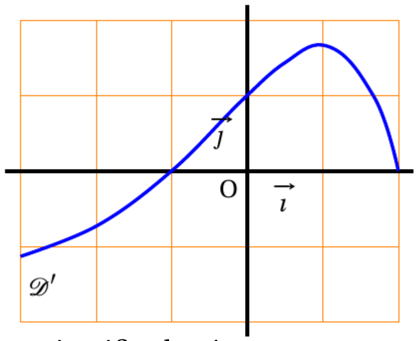
- Si pour tout réel x de I on a $f'(x) \cdots 0$ alors alors f est croissante sur I.

- Si pour tout réel x de I on a $f'(x)\cdots 0$ alors alors f est décroissante sur I.

Capacité 5 ***Exploiter le lien entre signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction***

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère une fonction f dérivable sur $[-3\ ;\ 2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathscr{D}'$ ci -contre.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leqslant 0$.
2. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1\ ;\ 2]$.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, $f(x) \geqslant -1$.

1.7 Dérivée et recherche d'extremum

Définition 4
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- f admet un **maximum local** en a s'il existe un intervalle J inclus dans I et contenant a, tel que pour tout $x \in \mathrm{J}$, $f(x) \leqslant f(a)$.

  f admet un **maximum global** en a si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \leqslant f(a)$.
- f admet un **minimum local** en a s'il existe un intervalle J inclus dans I et contenant a, tel que pour tout $x \in \mathrm{J}$, $f(x) \geqslant f(a)$.

  f admet un **minimum global** en a si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \geqslant f(a)$.

Propriété 3 ***Condition nécessaire, condition suffisante pour avoir un extremum local***
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit a un réel appartenant à I.

☞ **Condition nécessaire d'extremum local** Si f atteint un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

☞ **Condition suffisante d'extremum local** Si f' s'annule en changeant de signe en a, alors f atteint un extremum local en a.

1.8 Dérivée seconde

Définition 5

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa fonction dérivée f' est aussi dérivable sur I. On appelle **dérivée seconde de** f et on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f'.
- Par récurrence, pour un entier $n \geqslant 2$, on peut définir la fonction dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction f dérivable sur I, comme la fonction dérivée de la dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ de f si cette dernière est définie et dérivable sur I.

Capacité 6 ***Utiliser la dérivée seconde et les dérivées d'ordre supérieur***

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^5 + 5x^4 + 15x$.
   a. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer f' et f''.
   b. Étudier les variations de f' sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(-1)$.
   c. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que la fonction f définie sur $\mathscr{D} =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est n fois dérivable sur $\mathscr{D}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

   Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x \neq 0$, on a :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \quad \text{avec} \quad n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1 \text{ et } 0! = 1$$

2 Convexité

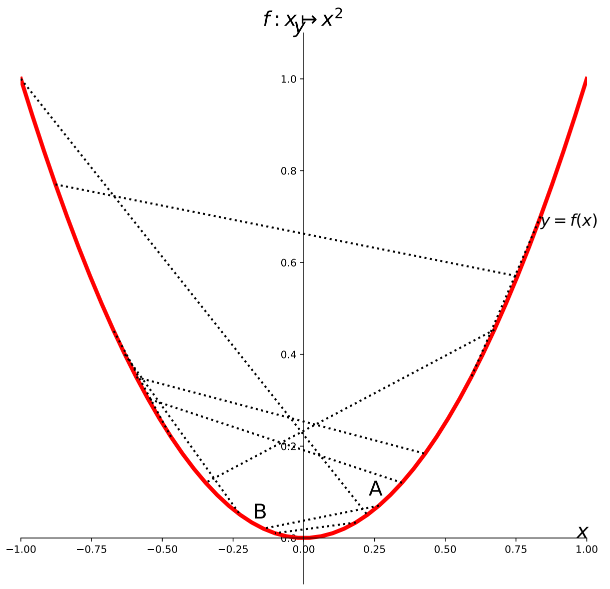
2.1 Convexité et lecture graphique

Définition 6

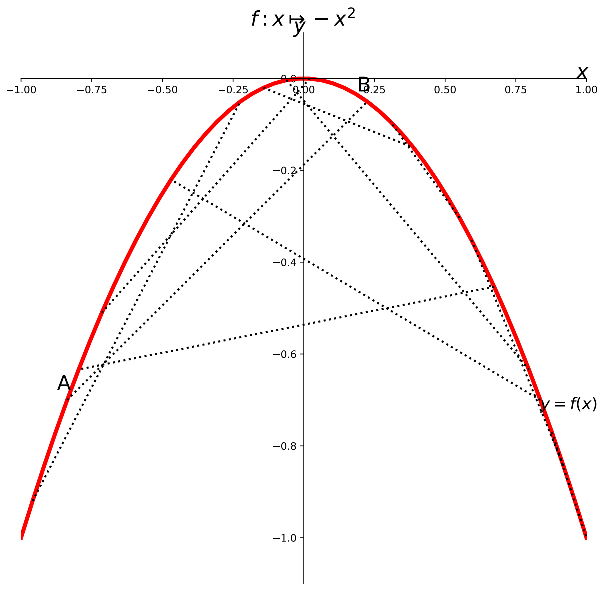
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

- f est **convexe** sur I si et seulement si pour tous points A et B distincts de $\mathscr{C}_f$, la corde [AB] est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ entre A et B.
- f est **concave** sur I si et seulement si pour tous points A et B distincts de $\mathscr{C}_f$, la corde [AB] est en-dessous de la courbe $\mathscr{C}_f$ entre A et B.

Fonction convexe et cordes



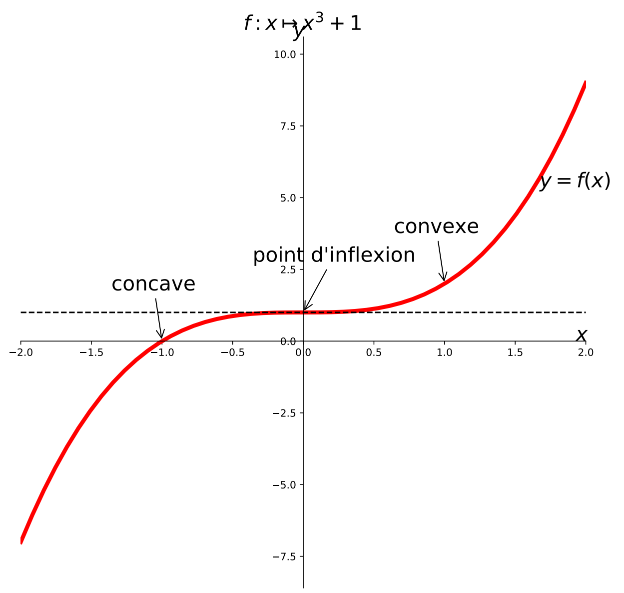
Fonction concave et cordes



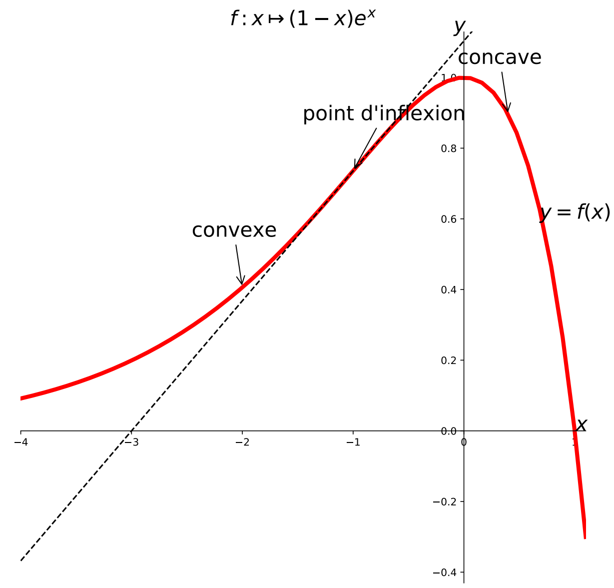
Définition 7

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère du plan et a un nombre réel appartenant à I.
Le point A de coordonnées $(a; f(a))$ est un **point d'inflexion** de $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente au point A.

Point d'inflexion 1



Point d'inflexion 2



Propriété 4

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère du plan et a un nombre réel appartenant à I.
Si le point A de coordonnées $(a\,;\,f(a))$ est un **point d'inflexion** de $\mathscr{C}_f$ alors la fonction f change de convexité en a : elle passe de convexe à concave ou de concave à convexe.

Capacité 7 ***Déterminer graphiquement la convexité d'une fonction***

1. Par lecture graphique de leur courbe (représentée si besoin avec la calculatrice), conjecturer la convexité des fonctions suivantes :

   a. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

   b. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x^2$.

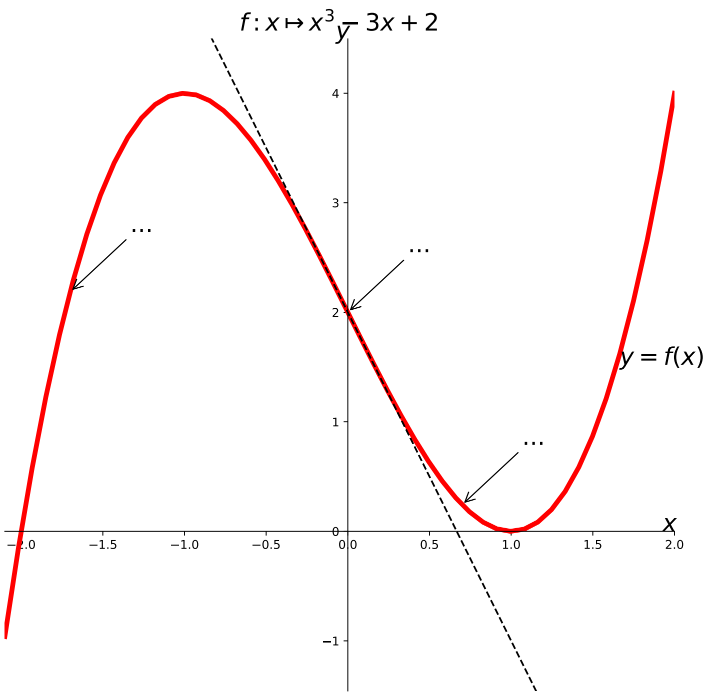
   c. h définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x}$.

   d. m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = \mathrm{e}^x$.

   e. c définie sur $\mathbb{R}$ par $r(x) = x^3$.

2. Si f est une fonction convexe sur un intervalle I, que peut-on dire de la fonction $-f$?

3. On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x + 2$ et sa tangente au point d'abscisse 0. Compléter le graphique ci-dessous en indiquant convexité et point d'inflexion.



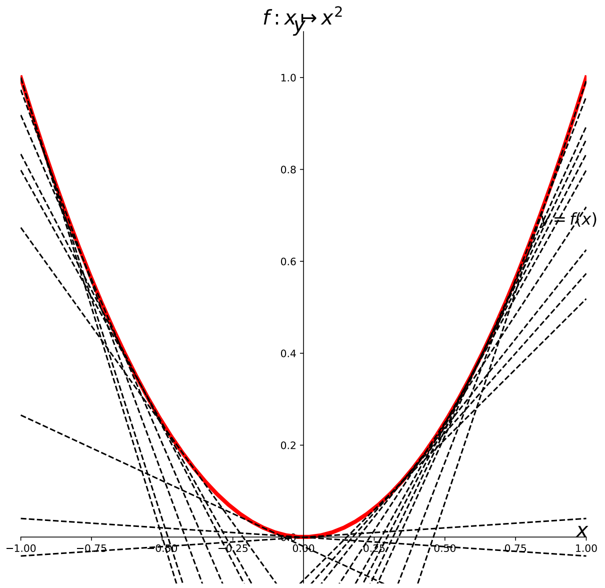
2.2 Convexité et sens de variation de f'

Propriété 5

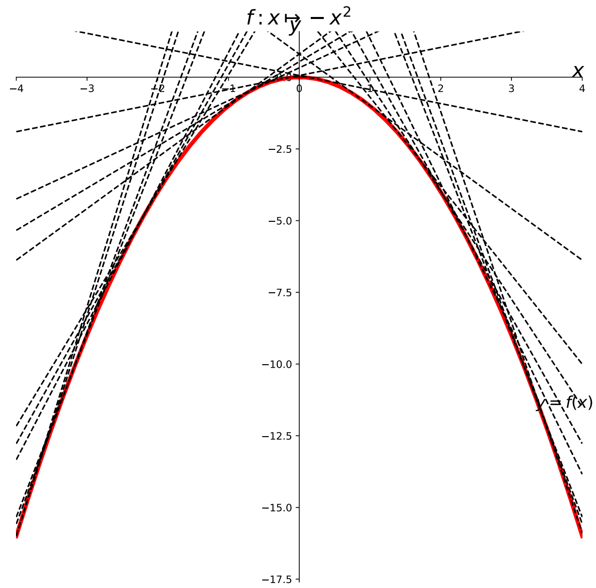
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. f est **convexe** sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
2. f est **concave** sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

Fonction convexe et tangentes



Fonction concave et tangentes



Capacité 8 ***Lien entre convexité et sens de variation***

Compléter les phrases :

- Si f est convexe et croissante sur un intervalle I, alors f croît de plus en plus ....
- Si f est convexe et décroissante sur un intervalle I, alors f décroît de plus en plus ....
- Si f est concave et croissante sur un intervalle I, alors f croît de plus en plus ....
- Si f est concave et décroissante sur un intervalle I, alors f décroît de plus en plus ....

2.3 Convexité et signe de la dérivée seconde f''

Propriété 6

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

1. f est **convexe** sur I si et seulement si pour tout réel x appartenant à I, on a $f''(x) \geqslant 0$.
2. f est **concave** sur I si et seulement si pour tout réel x appartenant à I, on a $f''(x) \leqslant 0$.

Propriété 7

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. Si pour tout réel x appartenant à I, on a $f''(x) \geqslant 0$, alors la courbe de f est au-dessus de chacune de ses tangentes.
2. Si pour tout réel x appartenant à I, on a $f''(x) \leqslant 0$, alors la courbe de f est en dessous de chacune de ses tangentes.

Démonstration ***Au programme, voir manuel Indice p. 206***

1. $\boxed{\textbf{Premier cas :}}$ Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. On suppose que pour tout réel $x \in$ I, on a $f''(x) \geqslant 0$ ce qui équivaut au fait que f est convexe sur I d'après la propriété précédente.

   Démontrons que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la tangente $\mathscr{T}_a$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a pour tout réel $a \in$ I.

   - On fixe un réel $a \in$ I.
   - Une équation de $\mathscr{T}_a$ est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
   - $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la tangente $\mathscr{T}_a$ si et seulement si pour tout réel $x \in$ I, on a :

   $$f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$$

   On définit la fonction d sur I par $d(x) = f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))$.
   $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la tangente $\mathscr{T}_a$ si et seulement si pour tout réel $x \in$ I, on a $d(x) \geqslant 0$.
   On étudie les variations de la fonction d sur I :
   Pour tout réel $x \in I$, $d'(x) = f'(x) - f'(a)$
   Or $f''(x) \geqslant 0$ sur I donc f' croissante sur I et donc :

x		a	
$d'(x) = f'(x) - f'(a)$	$-$	0	$+$

   On en déduit que le minimum de d sur I est
   $d(a) = f(a) - (f'(a) \times (a-a) + f(a)) = 0$

   On en déduit le signe de la fonction d sur I :
   Pour tout réel $x \in I$, $d(x) \geqslant d(a) = 0$

   On peut conclure pour tout réel $x \in$ I, on a $d(x) \geqslant 0$, ce qui équivaut au fait que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la tangente $\mathscr{T}_a$.

   - On a démontré que pour tout réel $a \in$ I, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de sa tangente $\mathscr{T}_a$.

2. **Deuxième cas :** Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. On suppose que pour tout réel $x \in \mathrm{I}$, on a $f''(x) \leqslant 0$ ce qui équivaut au fait que f est concave sur I d'après la propriété précédente.

   La fonction $-f$ est telle que pour tout réel $x \in \mathrm{I}$, on a $(-f)''(x) \geqslant 0$ c'est-à-dire $-f$ est convexe sur I. D'après le premier cas, la courbe de $-f$ est au-dessus de chacune de ses tangentes.

   Par symétrie d'axe (Ox)l'axe des abscisses, la courbe de $-f$ est en dessous de chacune de ses tangentes.

Capacité 9 *Esquisser $\mathscr{C}_f$ à partir des tableaux de variations de f, f' ou f'', voir capacité 6 p.207*

1. On considère une fonction f deux fois dérivable sur $[-5\,;5]$ dont on donne ci-dessous le tableau de variations ainsi que le tableau de variations de sa dérivée f' :

x	-5	-2	2	5
$f(x)$	-1 ↗	3 ↘	-2 ↗	0

x	-5	0	3	5
$f''(x)$	3 ↘	-2 ↗	2 ↘	0

   Déterminer la convexité de la fonction f et tracer dans un repère une courbe possible pour f.

2. On considère une fonction g deux fois dérivables sur $[-2\,;6]$, dont on donne ci-dessous les tableaux de variations de g et g''.

x	-2	0	3	4	6
$g''(x)$	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	2

x	-2	-1	0	2	4	6
$g(x)$	1 ↘	-4 ↗	3 ↗	5 ↘	2 ↘	0

   Déterminer la convexité de la fonction g et tracer dans un repère une courbe possible pour g.

Capacité 10 *Démontrer qu'une fonction est convexe*

Soit f une fonction convexe et deux fois dérivable sur un intervalle I.
Démontrer que la fonction composée e^f est convexe sur I.

2.4 Point d'inflexion et dérivée seconde

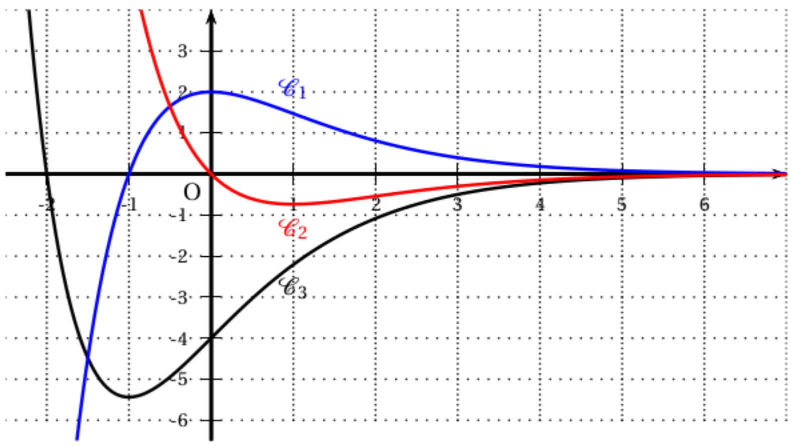
Propriété 8

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, soit $a \in \mathrm{I}$ et soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
Le point A de coordonnées $\left(a; f(a)\right)$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ si et seulement si f'' s'annule en a en changeant de signe.

Capacité 11 *Lier une représentation graphique de f, f' ou f''*

On considère une fonction f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ont été représentées. L'une de ces courbes représente la fonction f, une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde. Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f.



2. On admet que pour tout réel x, on a $f(x) = (-2x-4)\mathrm{e}^{-x}$.

   a. Déterminer des expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x.

   b. En déduire l'étude de la convexité de f et des éventuels points d'inflexions de sa courbe. Vérifier les conjectures établies à la question 1.

Capacité 12 ***Démontrer une inégalité de convexité, voir capacité 7 p.208***

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère du plan.

1. Déterminer des expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x puis étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. En déduire que pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$.
4. Démontrer que pour tous réels a et b, $\mathrm{e}^{-\frac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-a} + \mathrm{e}^{-b}}{2}$.

Table des matières