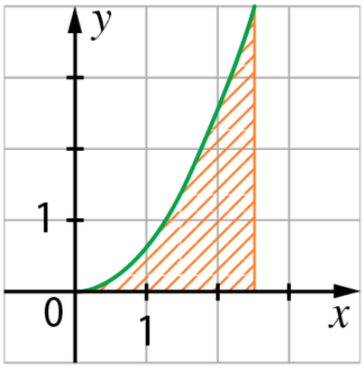
Séance du 30/03/2021

48 Capacité 3, p. 333

Soit F la fonction définie sur $I = [0\,;+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^x t\ln(t+1)\mathrm{d}t.$$

On donne ci-contre la courbe représentative (en vert) de la fonction $t \mapsto t\ln(t+1)$.



1. Donner une interprétation graphique de $F(4)$ et $F(5)$, puis conjecturer la comparaison de ces deux nombres.

2. Déterminer la dérivée de F sur I.

3. Étudier le sens de variation de F sur I, puis valider la conjecture de la question **1**.

1) $F(4) = \int_0^4 t\ln(1+t)\,dt$ est l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe d'équation $y = f(x)$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$.

$F(5) = \int_0^5 t\ln(1+t)\,dt$ est l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe d'équation $y = f(x)$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 5$

On peut conjecturer que $F(4) \leq F(5)$

2) f est continue sur $[0;+\infty[$ donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \mapsto \int_0^x t\ln(1+t)\,dt$ est dérivable

et pour tout réel $x \geq 0$:

$$F'(x) = x \ln(1+x)$$

Or pour tout réel $x \geq 0$, on a :

$$1+x \geq 1$$
donc $\ln(1+x) \geq \ln(1)$ par croissance de ln
et donc $\ln(1+x) \geq 0$

et enfin $x \ln(1+x) \geq 0$

Pour tout réel $x \geq 0$, on a $F'(x) \geq 0$, donc F croissante sur $[0;+\infty[$.

Or $4 < 5$

donc $F(4) \leq F(5)$

La conjecture formulée en 1) est prouvée.

Quelques calculs de primitives :

133 10 min **Capacité 2, p. 297**

Soit f et g les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x^2\,(3\ln(x)+1)$ et $g(x)=x^3\ln(x)$.

1. Montrer que g est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

2. Déterminer la primitive de f qui s'annule pour $x=1$.

1) g dérivable sur $]0;+\infty[$
Pour tout réel $x>0$, on a :

$$g'(x)=3x^2\ln(x)+x^3\times\frac{1}{x}$$
$$g'(x)=3x^2\ln(x)+x^2=x^2(3\ln(x)+1)$$
$$g'(x)=f(x)$$

Donc g est une primitive de f.

2) Les primitives de f sont de la forme :
$h : x\longmapsto x^3\ln(x)+k$ avec k constante.

La primitive de f qui s'annule pour $x=1$ vérifie : $h(1)=0 \iff 1^3\ln(1)+k=0$
$\iff k=0$

La primitive cherchée est donc :

$\varphi : x \mapsto x^3 \ln(x)$

134 10 min Capacité 3, p. 299

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 2x^3 - 8x + \dfrac{2}{x^2}$, sur $]0\,;+\infty[$

2. $y' = \dfrac{5}{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, sur $]0\,;+\infty[$

Résoudre une équation différentielle $y'(x) = f(x)$ équivaut à déterminer les primitives de f.

1) Les primitives de $x \mapsto 2x^3 - 8x + \dfrac{2}{x^2}$

sont de la forme $x \mapsto \dfrac{2}{4}x^4 - 8\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2}{x} + k$

c'est-à-dire $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^4 - 4x^2 - \dfrac{2}{x} + k$ avec k constante.

2) Les primitives de $x \mapsto \dfrac{5}{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

sont de la forme $x \mapsto 5\ln(x) - 2\sqrt{x} + k$

avec k constante.

136 20 min Capacité 4, p. 299

Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions définies de la façon suivante sur $[3 ; +\infty[$:

1. $f(x) = \dfrac{2}{2x-5}$

2. $g(x) = \dfrac{1}{(1-2x)^3}$

On se place sur $[3 ; +\infty[$

1) Les primitives de $f(x) = \dfrac{2}{2x-5}$

sont de la forme :

$F(x) = \ln(|2x-5|) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

soit $F(x) = \ln(2x-5) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

car si $x \geq 3$ alors $2x-5 > 0$

2) Les primitives de $g(x) = (1-2x)^{-3}$

$g(x) = -\frac{1}{2} \times (-2) \times (1-2x)^{-3}$

sont de la forme :

$G(x) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{-3+1} \times (1-2x)^{-3+1} + C$

$G(x) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{(1-2x)^2} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$