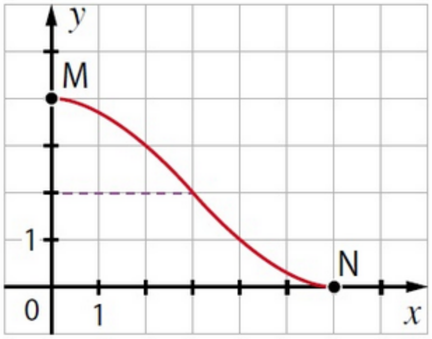
85 Une municipalité commande à une entreprise, une glissière pour un toboggan, dont l'allure est schématisée par la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f donnée ci-contre (les dimensions sont en mètres). Pour des raisons de sécurité, la pente de la glissière au sommet M et au sol N doit être horizontale. Enfin l'entreprise ne peut fabriquer que des glissières dont la courbe a une équation de la forme : $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont des réels.



1.a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

b. Montrer que $f'(x) = mx(x - 6)$ où m est un réel que l'on déterminera.

c. En déduire b en fonction de a et la valeur de c.

2. Sachant que la glissière passe par les points M(0 ; 4) et N(6 ; 0), en déduire une équation de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3. a. Étudier la convexité de f et prouver que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion.

b. Pour consolider le toboggan, le constructeur souhaite installer une barre de renfort horizontale, au point d'inflexion de la glissière. Déterminer à quelle hauteur cette barre devra être placée et quelle sera sa longueur.

Correction du n° 85 p. 218

1) a) • f définie sur $[0;6]$ par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

• f dérivable sur $[0;6]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0;6]$

Pour tout réel x, on a :

$$\boxed{f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.}$$

b) La pente de la glissière est horizontale au sommet M d'abscisse 0 et au sol N d'abscisse 6.

On a donc $f'(0) = 0$ et $f'(6) = 0$.

Les racines du trinôme f' sont donc 0 et 6.

On en déduit que la forme factorisée de f' est :

pour tout réel x, $\boxed{f'(x) = mx(x-6)}$

c) Identifions les formes développées de f' déterminées en questions 1) a) et b)

D'une part pour tout réel $x \in [0;6]$, on a d'après 1) a) :

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

D'autre part pour tout réel x, on a d'après 1) b) :

$$f'(x) = mx^2 - 6mx$$

Par identification des coefficients, on a :

$$\begin{cases} 3a = m \\ 2b = -6m \\ c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} m = 3a \\ b = -3m \\ c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{m}{3} \\ b = -9a \\ c = 0 \end{cases}$$

2) On a $f(0) = 4$ et $f(6) = 0$

$$\begin{cases} b = -9a \\ f(0) = 4 \\ f(6) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -9a \\ d = 4 \\ a \times 6^3 + b \times 6^2 + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -9a \\ d = 4 \\ 216a + 36b + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = -9a \\ d = 4 \\ 54a + 9b + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -9a \\ d = 4 \\ 54a - 81a + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -9a = -\frac{1}{3} \\ d = 4 \\ a = \frac{1}{27} \end{cases}$$

On en déduit que pour tout réel $x \in [0;6]$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{27}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 4}$$

3) a)

Pour tout réel $x \in [0;6]$:

$$f'(x) = \frac{1}{27} \times 3x^2 - \frac{1}{3} \times 2x = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x$$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f''(x) = \frac{1}{9} \times 2x - \frac{2}{3} = \frac{2}{9}(x - 3)$$

x	0		3		6
$f''(x)=\frac{2}{9}(x-3)$		$-$	0	$+$	

On en déduit que f est concave sur $[0;3]$ et convexe sur $[3;6]$ et que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en l'abscisse 3

b) La barre de renfort doit être positionné en l'abscisse 3 avec une longueur de :

$$f(3)=\frac{1}{27}\times 3^3-\frac{1}{3}\times 3^2+4=\cancel{3}-\cancel{3}+4=4 \text{ mètres}$$

Correction du QCM sur l'espace

Question 1 :

Soit (d) la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-t \quad , t\in\mathbb{R} \\ z=3+t \end{cases}$$

Un vecteur directeur de (d) est :

- [ ] $\vec{u_1}:(-1;2;3)$
- [ ] $\vec{u_2}:(-1;-1;3)$
- [x] $\vec{u_3}:(-2;1;-1)$
- [ ] $\vec{u_4}:(2;1;1)$

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

ou encore $-\vec{u} = \vec{u_3}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$

Question 2 :

Soit (d) la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 2-t \ , \ t \in \mathbb{R} \\ z = 3+t \end{cases}$$

Les points suivants appartiennent à (d):

- A (2 ; -1 ; 1)
- B (-1 ; 1 ; 4)
- C (3 ; 0 ; 5)

$$\begin{cases} 2 = -1+2t \\ -1 = 2-t \\ 1 = 3+t \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{3}{2} = t \\ t = 3 \\ t = -2 \end{cases}$$ pas de solution donc $A \notin (d)$

$$\begin{cases} -1 = -1+2t \\ 1 = 2-t \\ 4 = 3+t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 4-3 = 1 \end{cases}$$ pas de solution donc $B \notin (d)$

$$\begin{cases} 3 = -1+2t \\ 0 = 2-t \\ 5 = 3+t \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{4}{2} = 2 \\ t = 2 \\ t = 5-3 = 2 \end{cases}$$ une solution donc $C \in (d)$

Soit (D) la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=3-t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

et les vecteurs: $\vec{u}(-1;-2;1)$ et $\vec{v}\left(\frac{1}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$.

Alors la droite (D) ...

- passe par le point K (0 ; -1 ; 4)
- passe par le point L (3 ; 5 ; -1)
- admet le vecteur u comme vecteur directeur.
- admet le vecteur v comme vecteur directeur.

$$\begin{cases} 0 = 1+t \\ -1 = 1+2t \\ 4 = 3-t \end{cases} \iff \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$$

le système admet une solution donc $K \in (D)$

$$\begin{cases} 3 = 1+t \\ 5 = 1+2t \\ -1 = 3-t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 4 \end{cases}$$

pas de solution donc $L \notin (D)$

Un vecteur directeur de (D) est $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

On a $\vec{u} = -\vec{w}$ donc $\vec{u}$ vecteur directeur de D

Les droites (d) et (d') de représentations paramétriques :

(d) $\begin{cases} x=1+t \\ y=5-4t \\ z=2-2t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ et (d') $\begin{cases} x=-t' \\ y=7+4t' \\ z=7+2t' \end{cases}$, $t'\in\mathbb{R}$

Alors (d') est la parallèle à (d) passant par S(1 ; 3 ; 5).

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de (d') est $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$

On a $\vec{v} = -\vec{u}$ donc $\vec{v}$ et $\vec{u}$ colinéaires donc (d) et (d') sont parallèles.

Déterminons si (d') passe par S(1;3;5) :

$$\begin{cases} 1 = -t' \\ 3 = 7+4t' \\ 5 = 7+2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -1 \\ t' = -1 \\ t' = -1 \end{cases}$$

Le système a une solution donc S appartient à (d')