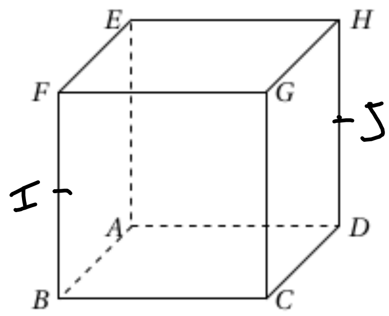
Corrigés des exemples du cours sur le produit scalaire dans l'espace

Capacité 1 ***Calculer un produit scalaire***

Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté a, I le milieu de $[BF]$ et J le milieu de $[DH]$.



Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$
2. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH}$
3. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AJ}$
4. $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BF}$
5. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{FH}$
6. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EG}$
7. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{GE}$
8. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BF}$

1) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$

2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = AD^2 = a^2$
projection orthogonale

3) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = AD^2 = a^2$ par projection orthogonale

4) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BF}$ par projection orthogonale
or $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$ donc $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}BF^2 = \frac{1}{2}a^2$

5) $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ car $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$

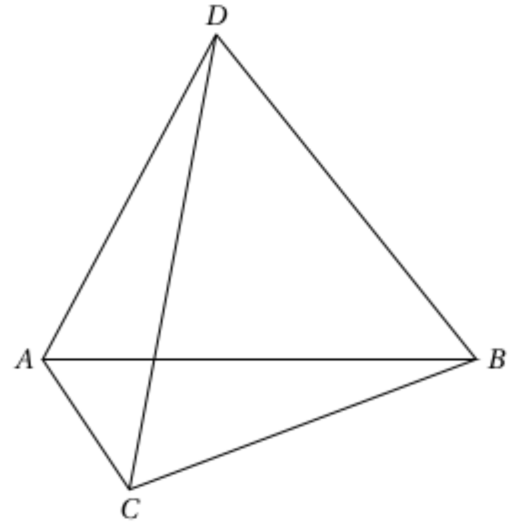
6) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2 = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2$

7) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AC} \cdot (-\overrightarrow{EG}) = -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EG} = -AC^2 = -a^2$

8) $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG}$ donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$ car $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{CG}$

Capacité 2 *Démontrer que des vecteurs sont orthogonaux avec le produit scalaire*

Les arêtes d'un tétraèdre régulier sont toutes de même longueur.
On considère un tétraèdre régulier $ABCD$, on appelle I le milieu de $[AB]$ et on note a la longueur de l'arête $[AB]$.



1. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ en fonction de a.
2. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ en fonction de a.
3. En déduire que le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1) ABD équilatéral donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD})$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a \times a \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a^2}{2}$$

2) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(-\overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = - AC \times AB \times \cos(\widehat{BAC}) = -\frac{a^2}{2}$$

3) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ par bilinéarité

donc $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$

On en déduit que $\overrightarrow{CD}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Capacité 4 ***Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, calculer une longueur ou un angle***

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. Soit les points $E(7;2;3)$, $F(0;1;4)$ et $G(0;4;-2)$. Les droites (EF) et (EG) sont-elles perpendiculaires ?

2. Dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ soit les points $R(2;0;0)$, $S\left(1;\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{4}{\sqrt{6}}\right)$ et $T\left(1;\sqrt{3};0\right)$. Calculer les distances OR, RS, ST et TO. Les points O, R, S et T sont-ils les sommets d'un losange ?
3. *Antilles juin 2017*

   On considère les points $A(-1;2;0)$, $B(1;2;4)$ et $C(-1;1;1)$.

   a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

   b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.

1) On détermine si $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont orthogonaux

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \\ z_F - z_E \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} x_G - x_E \\ y_G - y_E \\ z_G - z_E \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} = (-7)(-7) + 2\times(-1) + (-5)\times 1$

$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} = 42$

$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} \neq 0$ donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ ne sont pas orthogonaux

donc (EF) et (EG) ne sont pas perpendiculaires.

Capacité 3 ***Calculer des longueurs ou des angles avec le produit scalaire***

1. On considère un triangle EFG et on note les longueurs $EF = g$, $FG = e$ et $GE = f$.

   Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie le produit scalaire $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}$ en fonction des longueurs e, f et g passées en paramètre.

```
def p(e, f, g):
    return ...0.5*(f**2 - e**2 - g**2)
```

car $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EG}$

2. On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arête $AB = 6$ cm. On note I et J les milieux respectifs des arêtes $[AC]$ et $[CD]$.

   a. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

   b. Calculer les longueurs AI et AJ.

   c. On admet que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$. Calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$.

   d. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\cos(\widehat{IAJ})$ et en déduire une mesure en degrés de l'angle $\widehat{IAJ}$ arrondie au dixième.

2)

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2\right)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) = \frac{1}{2}\left(6^2 + 6^2 - 6^2\right) = 18$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AD^2 - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})^2\right) = \frac{1}{2}\left(6^2 + 6^2 - 6^2\right) = 18$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(AC^2 + AD^2 - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})^2\right) = \frac{1}{2}\left(AC^2 + AD^2 - DC^2\right)$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(6^2 + 6^2 - 6^2\right) = 18$

<u>Autre méthode</u> : ABC équilatéral donc

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 6 \times 6 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 18$

b)

J milieu de $[CD]$ et ACD équilatéral donc d'après le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle AJD rectangle en J, on a :

$AJ^2 = AD^2 - JD^2 = 6^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 36 - 9 = 27$

$AJ^2 = 27$ donc $AJ = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

De même on démontre que $AI = 3\sqrt{3}$

c) I milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

J milieu de $[CD]$ donc $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})\right)$$

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD})$$

On peut déduire des questions précédentes que :

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}(18 + 6^2 + 18 + 18) = \frac{1}{4}(54+36)$$

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4} \times 90 = 22,5$$

d) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = AI \times AJ \times \cos(\widehat{IAJ})$

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = (3\sqrt{3}) \times (3\sqrt{3}) \times \cos(\widehat{IAJ})$$

or $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = 22,5$, on en déduit que :

$$\cos(\widehat{IAJ}) = \frac{22,5}{9 \times 3} = \frac{22,5}{27}$$

On en déduit que $\widehat{IAJ} = \arccos\left(\frac{22,5}{27}\right) \approx 33,6^\circ$

Capacité 4 ***Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, calculer une longueur ou un angle***

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. Soit les points $E(7;2;3)$, $F(0;1;4)$ et $G(0;4;-2)$. Les droites (EF) et (EG) sont-elles perpendiculaires?

2. Dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ soit les points R (2;0;0), S $\left(1;\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{4}{\sqrt{6}}\right)$ et T $\left(1;\sqrt{3};0\right)$. Calculer les distances OR, RS, ST et TO. Les points O, R, S et T sont-ils les sommets d'un losange?

3. *Antilles juin 2017*

   On considère les points A$(-1 ; 2 ; 0)$, B$(1 ; 2 ; 4)$ et C$(-1 ; 1 ; 1)$.

   a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

   b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.

2). $\overrightarrow{OR}\begin{pmatrix}2-0\\0-0\\0-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OR}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OR} = 2^2+0^2+0^2=4$ donc $\|\overrightarrow{OR}\|^2=4$

donc $\boxed{OR=\sqrt{4}=2}$

$\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}1-2\\ \frac{1}{\sqrt{3}}-0\\ \frac{4}{\sqrt{6}}-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{4}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{RS} = 1+\frac{1}{3}+\frac{16}{6}=1+3=4$

donc $\boxed{RS=\sqrt{4}=2}$

$\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}1-1\\ \sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0-\frac{4}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{ST}\cdot\overrightarrow{ST} = 0^2+\left(\frac{\sqrt{3}^2-1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{-4}{\sqrt{6}}\right)^2$

$\overrightarrow{ST}\cdot\overrightarrow{ST} = 0+\frac{2^2}{3}+\frac{16}{6}=\frac{24}{6}=4$

donc $\boxed{ST=\sqrt{4}=2}$

$\overrightarrow{TO}\begin{pmatrix}-1\\ -\sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{TO}\cdot\overrightarrow{TO} = (-1)^2+(-\sqrt{3})^2=4$

donc $\boxed{TO=\sqrt{4}=2}$

- Les trois points $O(0;0;0)$ $R(2;0;0)$ et $T(1;\sqrt{3};0)$ sont dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'équation $z=0$. Mais le point $S\left(1;\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{4}{\sqrt{6}}\right)$ n'appartient pas à ce plan car sa cote $\frac{4}{\sqrt{6}}$ est non nulle.

Les points O; R, S, T ne sont donc pas coplanaires, donc même si $OR=RS=ST=TO$, ORST n'est pas un losange.

3)

- On détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{0}$ donc :

A, B, C alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires

A, B, C alignés ssi il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} 2 = k\times 0 \\ -1 = k\times 0 \\ 1 = k\times 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = 0 \\ -1 = 0 \\ \frac{1}{4} = k \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution, donc il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ et donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et A, B, C ne sont pas alignés.

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 0 + 0\times(-1) + 4\times 1$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4}$$

b) D'après la propriété du cosinus :

$$* \quad \underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}_{4} = \underbrace{AB\times AC}_{\text{à calculer}} \times \underbrace{\cos(\widehat{BAC})}_{?}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = 2^2 + 0^2 + 4^2 = 20$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = AB^2 \times \cos(\widehat{BAB})$$

$$= AB^2 \times \cos(0) = AB^2$$

donc $AB^2 = 20$

donc $\boxed{AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}}$

De même $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 0^2 + (-1)^2 + 1^2$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$

donc $AC^2 = 2$

donc $\boxed{AC = \sqrt{2}}$

On déduit de l'égalité (*) que :

$4 = 2\sqrt{5} \times \sqrt{2} \times \cos(\widehat{BAC})$

donc $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{4}{2\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{10}} = \dfrac{2\sqrt{10}}{10}$

$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

on en déduit que :

$\boxed{\widehat{BAC} = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right) \simeq 51^\circ}$

Capacité 5 ***Étudier des problèmes de configuration dans l'espace : orthogonalité de deux droites***

Soit $\mathscr{D}$ une droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 4+3t \\ y = -2+t \\ z = 1-5t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

1. Le point $B(7;-1;-4)$ appartient-il à $\mathscr{D}$?
2. Soit $E(9;3;-2)$ et $F(11;2;-1)$. Les droites $\mathscr{D}$ et (BE) sont-elles orthogonales ? Les droites $\mathscr{D}$ et (BF) sont-elles orthogonales ?
3. Quelle propriété vraie dans le plan n'est plus vraie dans l'espace ?

1) $B(7;-1;-4)$ appartient à $\mathscr{D}$ ssi il existe un réel t tel que :

$$\mathscr{S} \begin{cases} 7 = 4+3t \\ -1 = -2+t \\ -4 = 1-5t \end{cases}$$

On résout le système $\mathscr{S}$:

$$\mathscr{S} \iff \begin{cases} \frac{3}{3} = t = 1 \\ 1 = t \\ \frac{-5}{-5} = t = 1 \end{cases}$$

Le système admet une solution, donc le point B appartient à la droite $\mathscr{D}$.

2) D'après la représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ donnée dans l'énoncé, un vecteur

directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de (BE) est $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BE}\cdot\vec{u} = 2\times3+4\times1+2\times(-5) = 0$

On en déduit que les droites $\mathcal{D}$ et (BE) sont orthogonales car leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux

De même, $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}$ vecteur directeur de la droite (BF) est orthogonal au vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$ car $\overrightarrow{BF}\cdot\vec{u} = 4\times3+3\times1+3\times(-5)$

$\overrightarrow{BF}\cdot\vec{u} = 0$

On a donc (BF) et $\mathcal{D}$ orthogonales

<u>Remarque</u>: (BE) et (BF) sont orthogonales à une même troisième

droite $\mathcal{D}$ mais ne sont pas parallèles.

Si (BE), (BF) et $\mathcal{D}$ avaient été coplanaires on aurait pu affirmer que (BE) // (BF).

3) Soit $\mathcal{D}'$ de représentation paramétrique :

$$\mathcal{D}' \begin{cases} x = 5t \\ y = 5t \\ z = 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ est

$\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times 3 + 5 \times 1 + 4 \times (-5)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

droite $\mathcal{D}$ mais ne sont pas parallèles.

Si (BE), (BF) et $\mathcal{D}$ avaient été coplanaires on aurait pu affirmer que (BE) // (BF).

3) Soit $\mathcal{D}'$ de représentation paramétrique :

$$\mathcal{D}' \begin{cases} x = 5t \\ y = 5t \\ z = 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ est $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times 3 + 5 \times 1 + 4 \times (-5)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+3t=5u \\ t=2+5u \\ -9-25u=4u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+3t=5u \\ t=2+5\times\frac{-9}{29} \\ u=\frac{-9}{29} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+3\times\frac{13}{29}=5\times\left(\frac{-9}{29}\right) \text{ égalité fausse} \\ t=\frac{13}{29} \\ u=-\frac{9}{29} \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution car la première égalité n'est pas vérifiée.

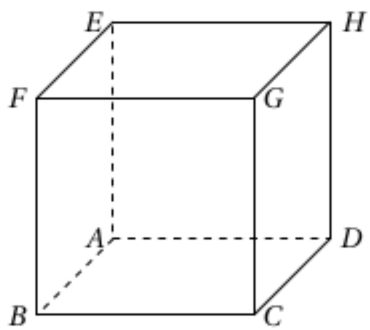
On en déduit que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont non coplanaires (donc non sécantes) et elles sont orthogonales comme on l'a démontré précédemment.

Capacité 6 ***Étudier des problèmes de configuration dans l'espace : orthogonalité d'une droite et d'un plan***

Amérique du sud novembre 2017.

On considère un cube ABCDEFGH (voir la figure de la capacité 1).

1. Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.
2. Sans utiliser de coordonnées, en déduire que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
3. En choisissant un repère orthonormal du plan, démontrer que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$.
4. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).



1) On a $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$ donc $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$

2) On a $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}) \cdot \overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD}$$

Or $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ (**).

de plus $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AD}\end{array}\right\}$ donc $\overrightarrow{AE}$ orthogonal au plan (ABD)

$\overrightarrow{AE}$ est donc orthogonal à tout vecteur de la direction du plan (ABD) donc :

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \quad (*)$$

On déduit de (*) et (**) que :

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 + 0 = 0$$

3) On munit l'espace du repère orthonormal $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

$A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$ $D(0;1;0)$
$E(0;0;1)$ $G(1;1;1)$

$\vec{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

On a donc $\vec{AG} \cdot \vec{BE} = -1\times1 + 1\times0 + 1\times1 = 0$

et donc $\vec{AG}$ orthogonal à $\vec{BE}$.

4) D'après 2) on a $\vec{AG} \cdot \vec{BD} = 0$ donc $\vec{AG} \perp \vec{BD}$

D'après 3) on a $\vec{AG} \cdot \vec{BE} = 0$ donc $\vec{AG} \perp \vec{BE}$

$\vec{BE}$ et $\vec{BD}$ ne sont pas colinéaires donc forment une base du plan (BED)

On en déduit que $\vec{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE) et donc (AG) est orthogonale au plan (BDE).

Capacité 7 ***Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite.***

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(2;0;1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(1;1;1)$.

1. Donner une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$.
2. Soit le point $B(3;2;4)$.
   - **a.** Montrer que B n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.
   - **b.** Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de B sur $\mathscr{D}$, c'est-à-dire du point H de $\mathscr{D}$ tel que $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{u}$.

1) $\mathscr{D}$ passe par le point $A(2;0;1)$

$\mathscr{D}$ admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

donc $\mathscr{D}$ admet comme représentation paramétrique :

$$M(x;y;z) \in \mathscr{D} \iff \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u}$$

$$\iff \begin{cases} x - x_A = t\,x_{\overrightarrow{u}} \\ y - y_A = t\,y_{\overrightarrow{u}} \\ z - z_A = t\,z_{\overrightarrow{u}} \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t\, x_{\vec{u}} \\ y = y_A + t\, y_{\vec{u}} \\ z = z_A + t\, z_{\vec{u}} \end{cases}$$
avec $t \in \mathbb{R}$

$$\boxed{M(x;y;z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 0 + t \\ z = 1 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}}$$

2) a) Soit le point $B(3;2;4)$.

B appartient à $\mathcal{D}$ ssi il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} 3 = 2 + t \\ 2 = 0 + t \\ 4 = 1 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = t \\ 2 = t \\ 3 = t \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc $B(2;3;4)$ n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.

b) H projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$ est l'unique point de $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{u}$.

$$\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{u} \iff \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{u} = 0$$

H est un point de $\mathcal{D}$ donc il existe un réel t que : $H\begin{pmatrix} 2+t \\ t \\ 1+t \end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} t-1 \\ t-2 \\ t-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \iff t-1+t-2+t-3=0$$
$$\iff 3t-(1+2+3)=0$$
$$\iff 3t - \frac{3\times(1+3)}{2} = 0$$
$$\iff 3t-6=0$$

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \iff t = \frac{6}{3} = 2$$

On en déduit que les coordonnées du projeté orthogonal H de B sont sont :

$$H\begin{pmatrix} 2+2 \\ 2 \\ 1+2 \end{pmatrix} \text{ soit } H\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Capacité 11 ***Déterminer l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal et un point***

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, soit $A(3;-1;4)$, $B(2;1;4)$ et $C(3;-2;0)$.

1. Déterminer une équation de chacun des trois plans de base de repères respectifs $\left(O;\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, $\left(O;\vec{\imath}, \vec{k}\right)$, $\left(O;\vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_1$ passant par B et de vecteur normal $\vec{n}(4;-3;1)$.

3. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$ passant par A et orthogonal à la droite (BC).

4. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_3$ passant par C et parallèle au plan $\mathscr{P}_2$.

5. **a.** Démontrer que les points A, B, C définissent un plan.

b. Équation du plan (ABC), $1^{ère}$ méthode

Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en résolvant un système de deux équations linéaires à trois inconnues. En déduire une équation du plan (ABC).

c. Équation du plan (ABC), $2^{ème}$ méthode

Résoudre le système de trois équations à quatre inconnues a, b, c, d : $\begin{cases} ax_A + by_A + cz_A + d = 0 \\ ax_B + by_B + cz_B + d = 0 \\ ax_C + by_C + cz_C + d = 0 \end{cases}$

En déduire une équation du plan (ABC).

2)

- Le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est l'ensemble des points $M(x ; y ; 0)$ donc il a pour équation : $z = 0$
- Le plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$ est l'ensemble des points $M(x ; 0 ; z)$ donc il a pour équation $y = 0$.
- Le plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$ est l'ensemble des points $M(0 ; y ; z)$ donc il a pour équation $x = 0$

3) Soit $\mathcal{P}_1$ le plan passant par le point $B(2 ; 1 ; 4)$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(\underset{a}{4} ; \underset{b}{-3} ; \underset{c}{1})$.

- Une équation de $\mathcal{P}_1$ est de la forme : $4x - 3y + z + d = 0$
- De plus $B(2 ; 1 ; 4)$ appartient à $\mathcal{P}_1$ donc :

$$4 \times 2 - 3 \times 1 + 4 + d = 0$$

$$\Rightarrow \quad 9 + d = 0$$

$\Leftrightarrow \quad d = -9$

Une équation de $\mathcal{P}_1$ est donc :

$$\boxed{4x - 3y + z - 9 = 0}$$

4) $\mathcal{P}_2$ orthogonal à (BC)

donc $\overrightarrow{BC}$ normal à $\mathcal{P}_2$

$B(2;1;4) \quad C(3;-2;0)$

donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Une équation de $\mathcal{P}_2$ est donc de la forme : $1x - 3y - 4z + d = 0$

De plus $A(3;-1;4)$ appartient à $\mathcal{P}_2$ donc :

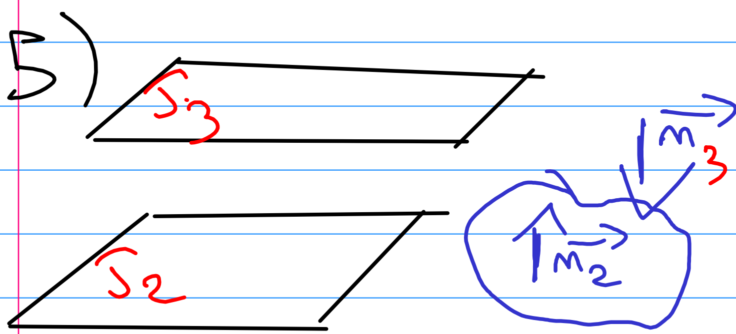
$$3 + 3 - 16 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -10 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad d = 10$$

Une équation de $\mathcal{P}_2$ est donc :

$$\boxed{x - 3y - 4z + 10 = 0}$$

5) 

$\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles donc $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}_2$ est aussi normal à $\mathcal{P}_3$.

- Une équation de $\mathcal{P}_3$ est donc de la forme :

$$x - 3y - 4z + d = 0$$

- De plus $C(3;-2;0)$ appartient à $\mathcal{P}_3$ donc :

$$3 - 3\times(-2) - 4\times 0 + d = 0$$

$\Leftrightarrow \quad 3+6+d=0$

$\Leftrightarrow \quad d=-9$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Une équation de } \mathcal{J}_3 \text{ est donc :} \\ \qquad 3x-3y-4z-9=0\end{array}}$$

(ABC).

6) b) Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (ABC).

$\vec{n}$ normal au plan (ABC) ssi $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \text{et}\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\-4\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \text{et}\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-a+2b=0\\ -b-4c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2b\\ c=-\frac{1}{4}b\end{cases}$$

On en déduit que :

$\vec{n}\begin{pmatrix}2b\\b\\-\frac{1}{4}b\end{pmatrix}$ avec b réel non nul

Pour $b=4$ $\vec{n}_1\begin{pmatrix}8\\4\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC)

Une équation de (ABC) est donc de la forme :

$$8x + 4y - z + d = 0$$

De plus $C(3;-2;0)$ appartient au plan (ABC), donc :

$$8\times 3 + 4\times(-2) - 0 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 16 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad d = -16$$

Une équation du plan (ABC) est donc de la forme :

$$\boxed{8x + 4y - z - 16 = 0}$$

6.) c) Soit $ax+by+cz+d=0$ une équation de (ABC) :

$$\text{cf} \begin{cases} A \in (ABC) \\ B \in (ABC) \\ C \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\times 3 - b + 4c + d = 0 \\ a\times 2 + b + 4c + d = 0 \\ 3a - 2b + d = 0 \end{cases}$$

On a un système de trois équations à 4 inconnues a, b, c, d.

On choisit d'exprimer trois inconnues par exemple a, b et c en fonction d'une quatrième d.

Capacité 12 ***Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan***

Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -7+t \\ y & = & 4+2t \\ z & = & -5-t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$$

et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $-2x-3y+z-6=0$.

1. Déterminer si la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.
2. Si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont sécants, calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

1) $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}(1;2;-1)$
$\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(-2;-3;1)$

$\vec{n}\cdot\vec{u} = -2+(-6)+(-1) = -9 \neq 0$
donc $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux
donc $\mathscr{D}$ est sécante avec le plan $\mathscr{P}$

2) Pour déterminer le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan $\mathscr{P}$, on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x=-7+t \\ y=4+2t \\ z=-5-t \\ -2x-3y+z-6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-7+t \\ y=4+2t \\ z=-5-t \\ 14-2t-12-6t-5-t-6=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-7+t \\ y=4+2t \\ z=-5-t \\ -9-9t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-7+t \\ y=4+2t \\ z=-5-t \\ t=\frac{-9}{9}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-8 \\ y=2 \\ z=-4 \\ t=-1 \end{array}\right.$$

La droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ sont sécantes au point de coordonnées $(-8;2;-4)$.

Capacité 13 ***Calculer la distance d'un point à un plan par projection orthogonale***

On considère un cube ABC de côté 1 (voir figure de la capacité 1).

On note L, I et J les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[EF]$ et $[HG]$ et K le centre du carré $BCGF$.

1. Justifier que $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace. On exprime désormais toutes les coordonnées dans ce repère.

2. **a.** Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{LK}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{BJ}$

   b. En déduire que la droite (LK) est orthogonale au plan (IJB).

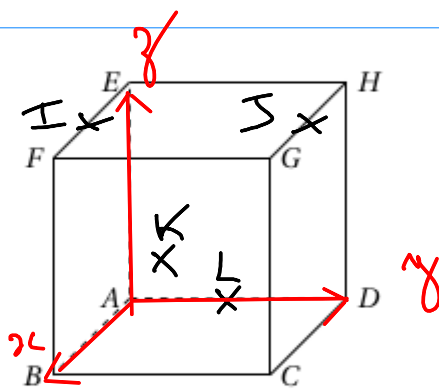
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (LK).

   d. Déterminer une équation du plan (IJB).

   e. En résolvant un système d'équations linéaires, déterminer les coordonnées du point R projeté orthogonal du point L sur le plan (IJB).

   f. En déduire la distance du point L au plan (IJB).

3. Calculer le volume de la pyramide $LIJCB$.



1) ABCD EFGH est un cube donc $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AE} \end{cases}$

et $AB = AD = AE = 1$, donc $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace.

2) a) $L(0;0,5;0)$ $K(1;0,5;0,5)$

donc $\overrightarrow{LK}(1;0;0,5)$

$B(1;0;0)$ et $I(0,5;0;1)$ donc $\overrightarrow{BI}(-0,5;0;1)$

$\vec{BJ}\begin{pmatrix}-0{,}5\,;\,1\,;\,1\end{pmatrix}$

b) $\vec{LK}\cdot\vec{BJ} = 1\times(-0{,}5) + 0\times 1 + 0{,}5\times 1 = 0$

et $\vec{LK}\cdot\vec{BI} = 1\times(-0{,}5) + 0\times 0 + 0{,}5\times 1 = 0$

$\vec{LK}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJB) donc (LK) est orthogonale au plan (IJB).

c) Représentation paramétrique de la droite (LK)

$$(LK)\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0{,}5 + 0\times t \\ z = 0 + 0{,}5t \end{cases} \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}$$

d) Le plan (IJB) a pour vecteur normal $\vec{LK}(1\,;0\,;0{,}5)$ donc a une équation de la forme : $x + 0y + 0{,}5z + d = 0$

$\iff x + 0{,}5z + d = 0$

On a $B(1\,;0\,;0)$ qui appartient au plan (BIJ), donc : $1 + 0{,}5\times 0 + d = 0 \iff d = -1$

e) R est le projeté orthogonal du point L sur le plan (IJB)
Puisque (LK) est orthogonale au plan (IJB) on en déduit que le point R est le point d'intersection de la droite (LK) et du plan (IJB)
On résout le système ci-dessous pour déterminer les coordonnées du point R :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0{,}5 \\ z = 0{,}5t \\ x + 0{,}5z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0{,}5 \\ z = 0{,}5t \\ t + 0{,}25t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{2}{5} \\ t = \frac{4}{5} \end{cases}$$

On en déduit que $R\left(\frac{4}{5} ; \frac{1}{2} ; \frac{2}{5}\right)$.

f) La distance du point L au plan (IJB) est, par propriété du projeté orthogonal, la distance LR :

$L(0 ; 0{,}5 ; 0)$ et $R\left(\frac{4}{5} ; 0{,}5 ; \frac{2}{5}\right)$

donc $LR^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

donc $LR = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

3) Le volume de la pyramide LIJCB est égal au produit : $\frac{1}{3} \times$ hauteur $\times$ Aire base IJCB

Or $\overrightarrow{IJ}(0;1;0)$ et $\overrightarrow{BC}(0;1;0)$

donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BC}$

donc IJCB parallélogramme.

De plus $\overrightarrow{BI}(-0,5;0;1)$

donc $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$

donc IJCB est un rectangle

L'aire de IJCB est donc égale à :

$$BC \times BI = 1 \times \sqrt{(0,5)^2 + 1^2} = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Finalement le volume de la pyramide LIJCB est égal à :

$$\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

Capacité 8 ***Déterminer la distance d'un point à un plan par projection orthogonale***

Voir capacité 8 p. 95 du manuel Indice et exercice 91 p.107.

91 *Capacité 8, p. 95*

On considère les points A(8 ; –1 ; 3), B(19 ; 10 ; 4) et le vecteur $\vec{n}(2\,;2\,;1)$. On note $\mathcal{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Démontrer que le point H(9 ; 0 ; –1) appartient à $\mathcal{P}$.

2. a. Démontrer que H est le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{P}$.

b. En déduire la distance du point B au plan $\mathcal{P}$.

3. Soit C(9 ; 6 ; 7).

a. Justifier que C est le projeté orthogonal de H sur la droite (BC).

b. Calculer la distance du point H à la droite (BC).

1) $\vec{AH}\begin{pmatrix}9-8\\0-(-1)\\-1-3\end{pmatrix}$ $\vec{AH}\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$

$\mathcal{P}$ plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}\,(2\,;2\,;1)$

$\vec{AH}\cdot\vec{n} = 1\times 2 + 1\times 2 + 1\times(-4) = 0$

D'après une propriété du cours, le plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$, est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{AM}\cdot\vec{n} = 0$

$\vec{AH}\cdot\vec{n} = 0$ donc $H \in \mathcal{P}$

2) a) $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-10\\-10\\-5\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BH} = -5\vec{n}$

$\overrightarrow{BH}$ est donc orthogonal à $\mathcal{J}$
de plus H appartient à $\mathcal{J}$ d'après 1)
donc par définition, H est le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{J}$.

b) D'après une propriété du cours, si H est le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{J}$ alors la distance de B au plan $\mathcal{J}$ est BH :

$$BH = \sqrt{(9-19)^2+(0-10)^2+(-1-4)^2}$$

$$BH = \sqrt{(-10)^2+(-10)^2+(-5)^2} = \sqrt{225}$$

$$BH = \sqrt{5\times 45} = 15$$

3) Soit $C(9;6;7)$

a) $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}0\\-6\\-8\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-10\\-4\\3\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0\times(-10)+(-6)\times(-4)+(-8)\times 3 = 0$$

D'une part C appartient à (BC)
D'autre part (CH) orthogonale à (BC)
Donc par définition H est le projeté orthogonal de H sur (BC).

b) Par propriété du projeté orthogonal, la distance du point H à la droite (BC) est CH.

$\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}0\\-6\\-8\end{pmatrix}$ donc $CH^2=(-6)^2+(-8)^2=100$

donc $CH=10$.