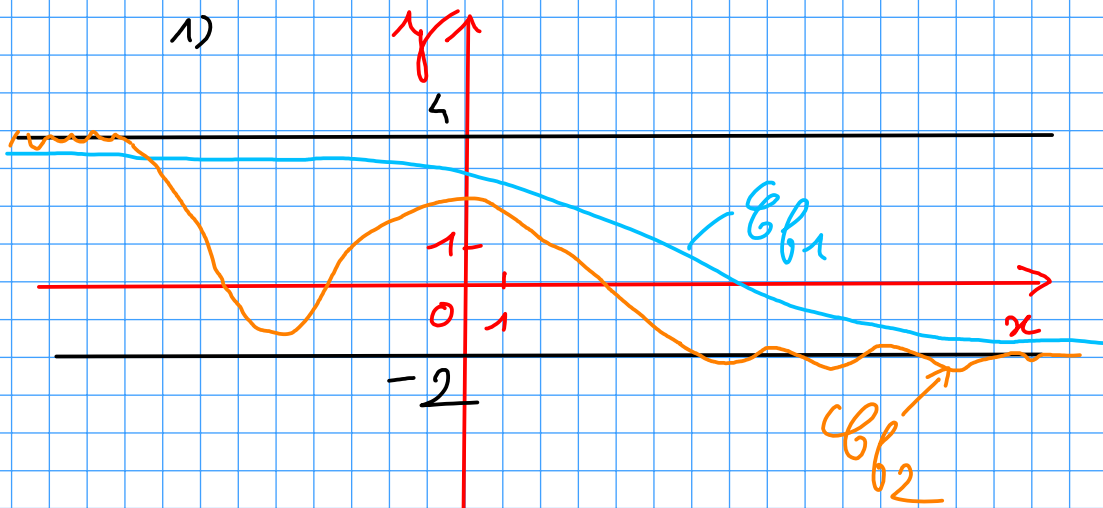


Chapitre limites de fonctions Covigés des exemples du cours

Capacité 1 Interpréter graphiquement une limite finie en l'infini

Soit f une fonction f définie sur \mathbb{R} telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$.

1. Représenter une courbe possible pour f en traçant ses droites asymptotes en $-\infty$ et $+\infty$.
2. f est-elle nécessairement une fonction décroissante sur \mathbb{R} ?



2) on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = 4$
mais f_2 n'est pas décroissante sur \mathbb{R} .

Capacité 2 Comprendre la définition d'une limite en l'infini

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse :

- Affirmation 1 : Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors f croissante sur son intervalle de définition.
- Affirmation 2 : Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ alors f décroissante sur son intervalle de définition.
- Affirmation 4 : Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ alors $f(x) < 0$ pour x assez grand.
- Affirmation 5 : Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ alors $f(x) > 734$ pour x assez petit.

• Affirmation 1: Faux on peut donner un contre-exemple graphique

• Affirmation 2: Faux, idem contre-exemple graphique

• Affirmation 4: Vraie. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ alors par définition $f(x) < 0$ pour x assez grand

• Affirmation 5: Vraie, par définition -

Capacité 3 Interpréter graphiquement des limites

On considère une fonction f dont on donne ci-dessous le tableau de variation.
On note \mathcal{C}_f sa courbe dans un repère orthonormal du plan.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	731	$+\infty$	$-\infty$	732

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Quelles sont les valeurs de $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$ et de $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$?
- Quelles sont les limites de f en 1^- et 1^+ ?
- Déterminer les éventuelles droites asymptotes horizontales à \mathcal{C}_f .
- Déterminer les éventuelles droites asymptotes verticales à \mathcal{C}_f .
- Dans un repère orthonormal du plan, tracer les droites asymptotes à \mathcal{C}_f puis une représentation possible de \mathcal{C}_f .

1) f définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

2) $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$

3) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$

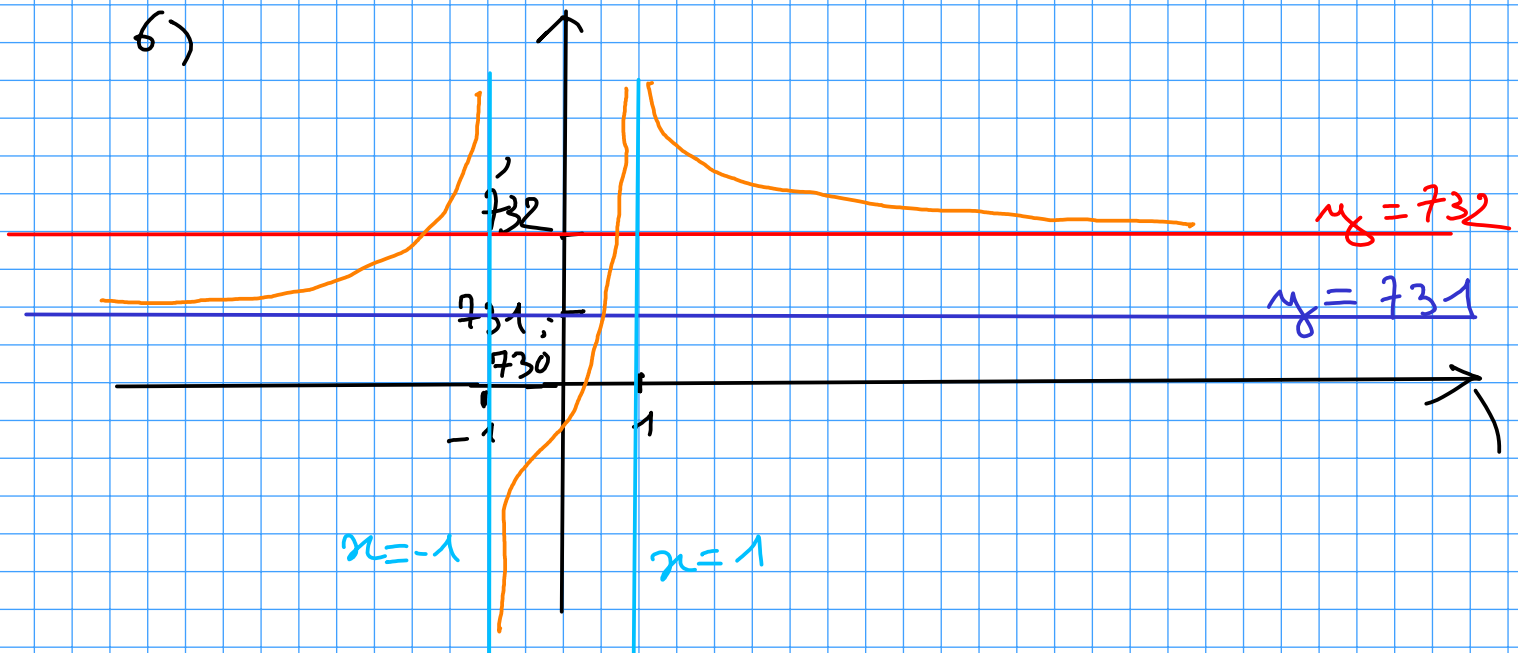
4) On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 731$ donc la droite d'équation $y = 731$ est asymptote horizontale à \mathcal{C}_f en $-\infty$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 732$ donc la droite d'équation $y = 732$ est asymptote horizontale à \mathcal{C}_f en $+\infty$.

5) On a $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à \mathcal{C}_f .

On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à \mathcal{C}_f .

6)



Capacité 5 Lever une forme indéterminée en factorisant le terme prépondérant

1. Soit h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = -2x^5 + 3x^4 - x + 1$.
Déterminer la limite de f en 0, puis en $+\infty$ et enfin en $-\infty$
2. Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 + x - 2}$$

- a. Déterminer la limite de f en chacune des bornes de son ensemble de définition.
- b. Interpréter graphiquement ces limites.

1) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1$

• Étude en $-\infty$:

• Par somme on a une FI du type $-\infty + \pm \infty$

• On factorise par le terme prépondérant ~~en $+\infty$~~
qui est x^5

$$-2x^5 + 3x^4 - x + 1 = x^5 \left(-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \right)$$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} -2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} = -2$$

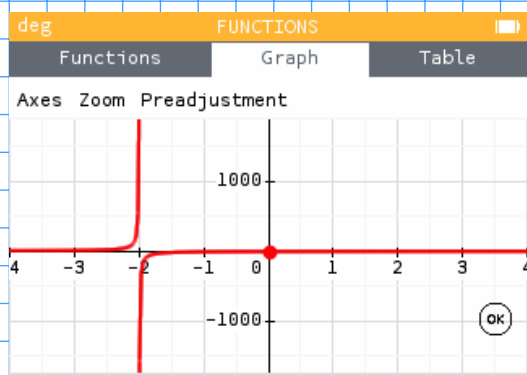
Donc par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$

• Étude en $+\infty$:

De même on montre que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$$

2)



f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$
car : $f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 + x - 2}$

Graphiquement on peut conjecturer que
 $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$, $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$

et que f possède des limites finies
en $-\infty$ et $+\infty$ (égales à 2 si on zoome)

• Étude en $-\infty$:

Par quotient on a une FI du type $\frac{+\infty}{+\infty}$

on factorise numérateur et dénominateur
par leur terme prépondérant en $-\infty$:

$$f(x) = \frac{x^2 \left(2 - \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{2 - \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

Par quotient on a désormais $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

donc f admet une asymptote horizontale
d'équation $xy = 2$ en $-\infty$

• Étude en $+\infty$: de même on montre que
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

• Pour l'étude en -2 et en 1 on a besoin
d'étudier le signe du trinôme $x^2 + x - 2$:

est racine évidente car $1^2 + 1 - 2 = 0$

le produit des racines est égal à $\frac{c}{a} = \frac{-2}{1} = -2$
donc l'autre racine est $\frac{-2}{1} = -2$

On en déduit le tableau de signes de x^2+x-2

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
x^2+x-2	$+$	0	-0	$+$

On a $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} 2x^2 - 8x + 6 = 30$

et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} x^2 + x - 2 = 0^+$

donc par quotient $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 + x - 2} = +\infty$

On a $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} 2x^2 - 8x + 6 = 30$

et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} x^2 + x - 2 = 0^-$

donc par quotient $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 + x - 2} = -\infty$

La droite d'équation $x = -2$ est donc asymptote à \mathcal{C}_f .

• Pour l'étude en 1, on est bloqué par une FI $\frac{0}{0}$.



Le terme prépondérant en 1 n'est pas le terme de + haut degré

on factorise le numérateur et le dénominateur pour simplifier des facteurs communs (il y en a forcément car les deux s'annulent en $x=1$)
Pour le dénominateur les racines sont -2 et 1 et la forme factorisée $(x+2)(x-1)$
Pour le numérateur, les racines sont 1 et -3 et la forme factorisée

$2(x-1)(x-3)$
Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ on a donc :

$$f(x) = \frac{2(x-1)(x-3)}{(x+2)(x-1)} = \frac{2x-6}{x+2}$$

et donc on a $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-6}{x+2} = -\frac{4}{3}$



Capacité 6 Limite et algorithme de seuil

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est *vraie* ou *fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 1 :** La boucle ci-dessous se termine :

```
def f(x):  
    return x ** 3 - x ** 2  
  
x = 0  
while f(x) < 734:  
    x = x + 1
```

- **Affirmation 2 :** La boucle ci-dessous ne se termine pas.

```
def f(x):  
    return x ** 3 - x ** 2
```



```
x = 0  
while f(x) > -734:  
    x = x - 1
```

- **Affirmation 3 :** La boucle ci-dessous se termine.

```
def f(x):  
    return (734 * x ** 2) / (x ** 2 + 1)  
  
x = 0  
while abs(f(x) - 734) > 0.001:  
    x = x + 1
```

- **Affirmation 4 :**

Même question que l'affirmation 3 mais sans la valeur absolue dans le test : $f(x) - 734 > 0.001$.

• L'affirmation 1 est vraie.

Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$x^3 - x^2 = x^3 \times \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$$

$$\text{donc par produit } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \times \left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

Par définition il existe donc un entier n tel que $x^3 - x^2 \geq 734$ et la boucle se termine.

• L'affirmation 2 est fausse.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$$

$$\text{donc par produit } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

Par définition il existe donc un entier n tel que $x^3 - x^2 \leq -734$ et la boucle se termine.

• L'affirmation 3 est vraie.

Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\frac{734x^2}{x^2 + 1} = \frac{x^2 \times 734}{x^2 \times \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{734}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{734}{1 + \frac{1}{x^2}} = 734 \text{ par quotient}$$

Par définition il existe donc un entier n tel que :
 $|f(x) - 734| \leq 0,001$ et la boucle se termine.

, L'affirmation 4 est fausse.

Pour tout réel x , on a :

$$\frac{734x^2}{x^2+1} - 734 = \frac{-734}{x^2+1}$$

$$\text{donc } \frac{734x^2}{x^2+1} < 734$$

donc la boucle de l'algorithme 4 ne se termine pas.

**Capacité 7 Déterminer une limite par composition (voir capacité 6 p.171)**

On donne le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur \mathbb{R} , on note \mathcal{C}_f la courbe de f dans un repère du plan.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0,5	$+\infty$

De plus on sait que :

$$f(-2) = -3 \quad \text{et} \quad f(3) = 2$$

On donne le tableau de variation d'une fonction g dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2\}$, on note \mathcal{C}_g la courbe de g dans un repère du plan.

**Limites de fonctions**

SpéMaths

x	$-\infty$	-3	-2	1	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$	-2	-5

- Calculer $g(f(-2))$ puis déterminer un encadrement de $g(f(3))$.
- Que vaut $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} g(x)$? Interpréter graphiquement cette limite.
 - Tracer dans un repère une représentation possible de la courbe \mathcal{C}_g avec ses droites asymptote(s) qu'on peut déduire du tableau de variation de g et sa tangente au point d'abscisse 1.

3. En justifiant déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{f(x)}{g(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) - f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \times f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x))$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(f(x))$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(g(x))$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(g(x))$

$$1) \quad g(f(-2)) = g(-3) = 0$$

$$g(f(3)) = g(2)$$

Or g décroissante sur $[1; +\infty[$ donc :

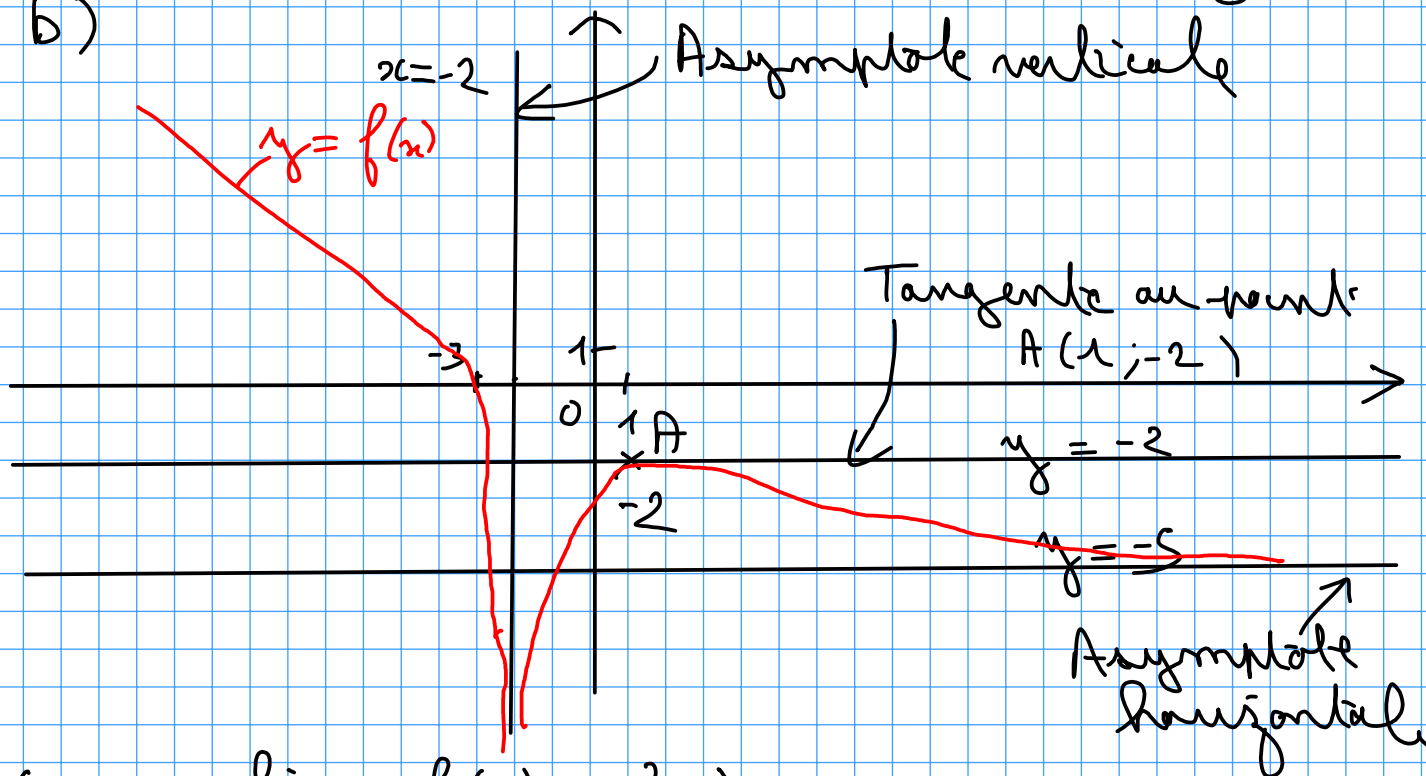
$$g(1) \geq g(2) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$-2 \geq g(2) > -5$$

2) a) On a $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} g(x) = -\infty$ donc la droite

d'équation $x = -2$ est asymptote à g

b)



3) On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = -3$ } donc par quotient

et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} g(x) = -\infty$ } $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0^+$

• On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -5$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ } par quotient
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0^-$

• On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} -f(x) = +\infty$ } par somme
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) - f(x) = +\infty$

• On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ } par produit
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \times f(x) = -\infty$

• On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $x \rightarrow +\infty \rightarrow f(x) \rightarrow +\infty \rightarrow g(f(x)) = -5$
 et $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = -5$

donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = -5$

• On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $x \rightarrow -\infty \rightarrow f(x) \rightarrow -\infty \rightarrow g(f(x)) = +\infty$
 et $\lim_{y \rightarrow -\infty} g(y) = +\infty$
 donc par composition $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(f(x)) = +\infty$

On a $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} g(x) = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

donc par composition $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(g(x)) = -\infty$

$$\begin{array}{ccccc} x & \longrightarrow & g(x) & \longrightarrow & f(g(x)) \\ -2^- & & -\infty & & -\infty \end{array}$$

On a $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} g(x) = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

donc par composition $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(g(x)) = -\infty$

$$\begin{array}{ccccc} x & \longrightarrow & g(x) & \longrightarrow & f(g(x)) \\ -2^+ & & -\infty & & -\infty \end{array}$$

Capacité 8 Utiliser les théorèmes de limite par comparaison ou encadrement

1. Soit f une fonction telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leq f(x) \leq 1$. Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + f(x)$

2. Soit la fonction g définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{\sin(x)}{x} + 1$.

- Représenter graphiquement la courbe de f avec sa calculatrice et conjecturer ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
- En utilisant un encadrement de $\sin(x)$, déterminer un encadrement de $g(x)$ pour tout réel x et en déduire les limites conjecturées.

1) Soit f une fonction telle que pour tout réel x : $-1 \leq f(x) \leq 1$

a) On en déduit que pour tout réel x , on a :

$$x-1 \leq f(x) + x \leq 1+x$$

De plus on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 = +\infty$

→ pour cette question seule l'inégalité de gauche est utile.

donc par comparaison on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = +\infty$

b) Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

De plus on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0^-$

Donc par encadrement on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

c) Pour tout réel x , on a :

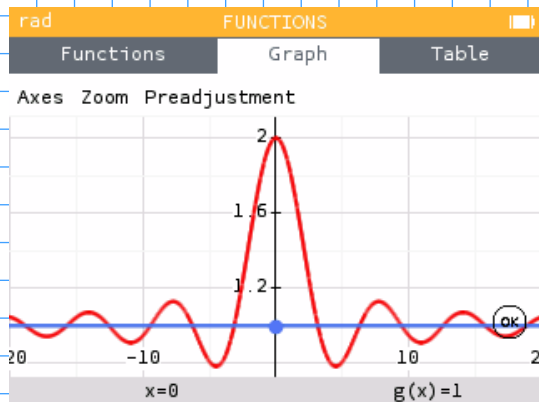
$$x-1 \leq f(x) + x \leq x+1$$

→ pour cette question seule l'inégalité de droite est utile.

De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} x+1 = -\infty$

Donc par comparaison $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = -\infty$

2)



a) On peut conjecturer graphiquement que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

b) Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$\text{donc } 1 - \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{\sin(x)}{x} \leq 1 + \frac{1}{x}$$

De plus, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$

Donc par encadrement on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin(n)}{n} = 1$

De même, on montre que: $\lim_{n \rightarrow -\infty} 1 + \frac{\sin(n)}{n} = 1$

Capacité 9 Déterminer une limite par règles opératoires (dont composition)

Déterminer les limites suivantes :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - e^x$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,5t+2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(3x+1)e^{-3x}$$

o $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0^+ \end{array} \right\}$ donc par somme puis quotient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$$

o Pour tout réel x , on a :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x} \times (e^{2x} - 1)}{e^{-x} \times (e^{2x} + 1)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$ et $\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0^+$

donc par composition $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0^+$

Par somme puis quotient on a donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$
 et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{-x} = -\infty$ } donc par somme
 puis quotient $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty$

On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,5t + 2 = -\infty$

et $\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0^+$

donc par composition $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,5t+2} = 0^+$

Pour tout réel x , $e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1)$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 1 = +\infty$

} donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(e^x - 1) = +\infty$

Pour tout réel x :

$$-1 \leq \sin(3x+1) \leq 1$$

$$\text{donc } -e^{-3x} \leq e^{-3x} \times \sin(3x+1) \leq e^{-3x}$$

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x = -\infty$ et $\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0^+$

donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} = 0^+$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-3x} = 0^-$

Par encadrement on a donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(3x+1) e^{-3x} = 0$$

Capacité 10 Déterminer une limite avec une règle de croissances comparées

Déterminer les limites suivantes :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x - e^x$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3)e^x$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{x}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{4x}}{x}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)e^x}{x}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$$

erreur $x \rightarrow -\infty$

• Pour tout $x > 0$:

$$x - e^x = x \left(1 - \frac{e^x}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ par croissances comparées}$$

$$\text{donc par produit puis somme } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{e^x}{x} = -\infty$$

$$\text{Puis par produit, on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{e^x}{x} \right) = -\infty$$

• Pour tout réel x , on a :

$$(x^2 - 3)e^x = x^2 e^x - 3e^x$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0 \text{ par croissances comparées}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{Donc par somme } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x - 3e^x = 0$$

$$\bullet \text{ On a } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \text{ donc par quotient } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

$$\text{De plus } \frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{e^x x}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x x = 0^-$$

$$\text{donc par quotient } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x x} = -\infty$$

On en déduit par somme que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} + \frac{e^{-x}}{x} = -\infty$$

• Pour tout réel x , on a :

$$\frac{e^{4x}}{x} = \frac{e^x}{x} \times e^{3x}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissances comparées

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x} = +\infty$

donc par produit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \times e^{3x} = +\infty$$

• Pour tout réel $x < 0$, on a :

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

de plus $x < 0$ donc $\frac{e^x}{x} < 0$

$$\text{donc } -\frac{e^x}{x} \geq \frac{e^x}{x} \cos(x) \geq \frac{e^x}{x} \quad (**)$$

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

donc par quotient $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0^-$
et donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{e^x}{x} = 0^+$ } (*)

Les limites (*) et l'encadrement (**) permettent d'appliquer le théorème de limite par encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} \times \cos(x) = 0$$

Pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{e^{\sqrt{x}}}{x} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2}} =$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

et $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^2} = +\infty$ par croissances comparées

donc par composition, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} = +\infty$

Corrigés de quelques exercices

n° 91 n. 182 : f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

• limite en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 3 = +\infty$$

$$\text{on pose } y = x^2 + 3$$

$$\text{de plus } \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$$

$$\text{donc par composition } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3} = +\infty$$

• limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 3 = +\infty$$

$$\text{on pose } y = x^2 + 3$$

$$\text{de plus } \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$$

$$\text{donc par composition } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3} = +\infty$$

n° 92 n. 182

f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{1-0,5x}$

• limite en $-\infty$:

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - 0,5x = +\infty$$

$$\text{on pose } y = 1 - 0,5x$$

$$\text{on a } \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$$

$$\text{donc par composition } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-0,5x} = +\infty$$

• limite en $+\infty$:

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 0,5x = -\infty$$

$$\text{On pose } y = 1 - 0,5x$$

$$\text{on a } \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0^+$$

$$\text{donc par composition } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-0,5x} = 0^+$$

Exercice supplémentaire

Soient u et v deux fonctions dont on donne les tableaux de variations ci-dessous :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$u(x)$	7	$+\infty$	4

Diagramme de variation pour $u(x)$: La fonction est décroissante de 7 à $-\infty$ sur $]-\infty, 3[$, puis elle est croissante de $+\infty$ à 4 sur $]3, +\infty[$.

x	$-\infty$	7	$+\infty$
$v(x)$	4	$+\infty$	3

Diagramme de variation pour $v(x)$: La fonction est croissante de 4 à $+\infty$ sur $]-\infty, 7[$, puis elle est décroissante de $+\infty$ à 3 sur $]7, +\infty[$.

En justifiant, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} v(u(x))$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(v(x))$

Correction :

1) On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 7$

On pose $y = u(x)$ et on a $\lim_{y \rightarrow 7} v(y) = +\infty$

Donc par composition $\lim_{x \rightarrow -\infty} v(u(x)) = +\infty$

2) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 3^+$

On pose $y = v(x)$ et on a $\lim_{y \rightarrow 3^+} u(y) = +\infty$

Donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(v(x)) = +\infty$