Histoire 1

Il y a 2500 ans environ, Zénon d'Élée énonçait le **paradoxe d'Achille et la tortue** : « *Achille voit une tortue devant lui. Il court pour la rattraper mais il ne pourra y arriver car lorsque Achille atteint la place qu'occupait la tortue, cette dernière a avancé; il doit donc atteindre maintenant la place qu'elle occupe alors, et ainsi de suite ...* ». Ce paradoxe peut être résolu avec la définition rigoureuse de limite d'une fonction fixée par Weierstrass (1815-1897) et la construction des nombres réels par Dedekind (1831-1916) qui fonde un continu mathématique correspondant au continu de notre intuition physique.

1 Limite en l'infini d'une fonction

1.1 Limite réelle en l'infini, asymptote horizontale

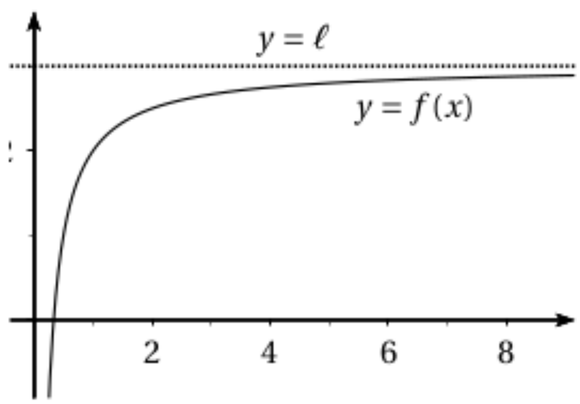
Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a\,;+\infty[$ et soit ℓ un réel.

- **Si tout intervalle ouvert I contenant ℓ, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand alors on dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$** et on note :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f(x)=\ell}$$

- On dit alors que la droite d'équation $y=\ell$ est **asymptote horizontale** à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.



La droite d'équation $y=\ell$ est asymptote à courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]-\infty\,;a]$ et soit ℓ un réel.

- **Si tout intervalle ouvert I contenant ℓ, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x négatif assez**

grand en valeur absolue alors on dit que $f(x)$ **tend vers** ℓ **lorsque** x **tend vers** $-\infty$ et on note :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell \quad \text{ou} \quad \lim_{-\infty} f(x)=\ell}$$

- On dit alors que la droite d'équation $y=\ell$ est **asymptote horizontale** à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

Capacité 1 *Interpréter graphiquement une limite finie en l'infini*

Soit f une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{-\infty} f(x)=4$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x)=-2$.

1. Représenter une courbe possible pour f en traçant ses droites asymptotes en $-\infty$ et $+\infty$.
2. f est-elle nécessairement une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$?

1.2 Limite infinie en l'infini

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[\alpha\,;+\infty[$.

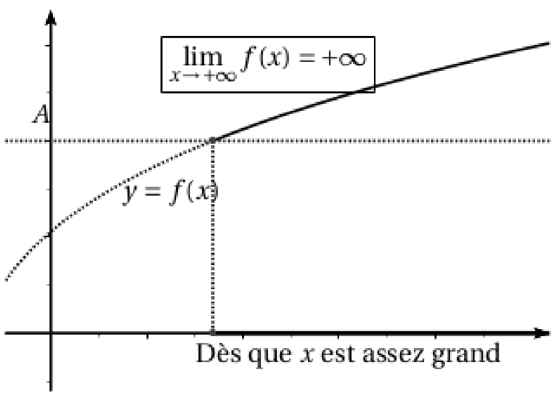
- **Si tout intervalle** $]A;+\infty[$ **contient toutes les valeurs de** $f(x)$ **pour** x **assez grand alors on dit que** $f(x)$ **tend vers** $+\infty$ **lorsque** x **tend vers** $+\infty$ et on note :

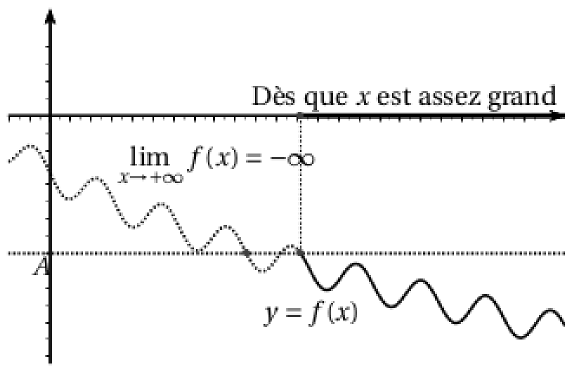
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f(x)=+\infty}$$

- **Si tout intervalle** $]-\infty;A[$ **contient toutes les valeurs de** $f(x)$ **pour** x **assez grand alors on dit que** $f(x)$ **tend vers** $-\infty$ **lorsque** x **tend vers** $+\infty$ et on note :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f(x)=-\infty}$$

On a des définitions similaires pour $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$





Capacité 2 *Comprendre la définition d'une limite en l'infini*

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse :

- **Affirmation 1 :** Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors f croissante sur son intervalle de définition.
- **Affirmation 2 :** Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ alors f décroissante sur son intervalle de définition.
- **Affirmation 4 :** Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ alors $f(x) < 0$ pour x assez grand.
- **Affirmation 5 :** Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ alors $f(x) > 734$ pour x assez petit.

1.3 Lien avec les suites

Propriété 1 ***admise***

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; +\infty[$.
Si la limite de la fonction f en $+\infty$ existe alors la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant a$ par $u_n = f(n)$, possède la même limite.

1.4 Limites de référence en l'infini

Propriété 2

1.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

2.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

3.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

4.

Soit $p \in \mathbb{R}$ alors, $\lim\limits_{x \to +\infty} p = p$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} p = p$

5.

$$\text{Si } m > 0 \text{ alors } \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} mx + p = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} mx + p = -\infty \end{cases}$$

6.

$$\text{Si } m < 0 \text{ alors } \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} mx + p = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} mx + p = +\infty \end{cases}$$

7.

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0 \end{cases}$$

8.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \end{cases}$$

Démonstration

Les démonstrations des limites de la fonction exponentielle en $-\infty$ et en $+\infty$ sont au programme et seront établies dans la propriété 5 de ce chapitre.

2 Limite d'une fonction en un réel a

Dans toute cette section, on considère une fonction f définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$ et un réel a tel que soit $a \in \mathscr{D}_f$, soit a est une borne de $\mathscr{D}_f$.

2.1 Limite infinie en a, asymptote verticale

Définition 4

- **Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tous les x assez proches de a, c'est-à-dire pour tous les x d'un certain intervalle $]a-\alpha\,;a+\alpha[$ et dans $\mathscr{D}_f$.**

  On note $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty}$.

- **Lorsqu'on considère la restriction de f à $\mathscr{D}_f \cap]a\,;+\infty[$, on dit que f a pour limite $+\infty$ à droite de a (ou en a^+) si tout intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tous les x d'un certain intervalle $]a\,;a+\alpha[$ et dans $\mathscr{D}_f$.**

  On note $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = +\infty}$.

- On définit de même que f a pour limite $+\infty$ à gauche de a (ou en a^-) et on note $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = +\infty}$.

- **Si f a pour limite $+\infty$ en a, en a^+ ou en a^-, alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.**

On a des définitions similaires pour $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = -\infty$.

2.2 Limite finie en a et limites de référence

Définition 5

Dire qu'une fonction f a pour limite ℓ en a signifie que tout intervalle ouvert de centre ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tous les x proches de a, c'est-à-dire pour tous les x d'un certain intervalle $]a-\alpha\,;a+\alpha[$ et dans $\mathscr{D}_f$.

On note : $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell}$.

En particulier, si $a \in \mathscr{D}_f$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ alors $\ell = f(a)$.

Comme pour les limites infinies, on peut avoir besoin de définir les notions de limite finie à droite en a notée $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = \ell}$ ou de limite finie à gauche en a notée $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \ell}$.

Propriété 3 *admise*

1. Soit a un réel :

- Si $a \geqslant 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$
- Si f est un polynôme ou un quotient de polynômes défini en a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^a$

2.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

3.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

4.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Capacité 3 *Interpréter graphiquement des limites*

On considère une fonction f dont on donne ci-dessous le tableau de variation.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormal du plan.

x	$-\infty$		-1			1			$+\infty$
$f(x)$	731	↗	$+\infty$ ‖	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖	$+\infty$	↘	732

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Quelles sont les valeurs de $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x<-1}} f(x)$ et de $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} f(x)$?
3. Quelles sont les limites de f en 1^- et 1^+ ?
4. Déterminer les éventuelles droites asymptotes horizontales à $\mathscr{C}_f$.
5. Déterminer les éventuelles droites asymptotes verticales à $\mathscr{C}_f$.
6. Dans un repère orthonormal du plan, tracer les droites asymptotes à $\mathscr{C}_f$ puis une représentation possible de $\mathscr{C}_f$.

3 Règles opératoires sur les limites

Dans toute cette section les fonctions u et v sont deux fonctions admettant une limite finie ou infinie, lorsque x tend vers a qui peut être un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.
L'abréviation FI signifie forme indéterminée, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de théorème général permettant de conclure.

3.1 Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to a} u(x) =$	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} v(x) =$	L'	L'	L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} u(x)+v(x) =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

3.2 Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to a} u(x) =$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} v(x) =$	ℓ'	$\ell'>0$ ou $\ell'<0$	$\ell'>0$ ou $\ell'<0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} u(x)\times v(x) =$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

3.3 Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to a} u(x) =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$\ell>0$ ou $\ell<0$	$\ell>0$ ou $\ell<0$
$\lim\limits_{x\to a} v(x) =$	$\ell'\neq 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	$\ell'>0$ ou $\ell'<0$	$\ell'>0$ ou $\ell'<0$	0^+	0^-
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{u(x)}{v(x)} =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$

$\lim\limits_{x\to a} u(x) =$	$-\infty$	$+\infty$	$\ell>0$	$\ell<0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} v(x) =$	0^+ ou 0^-	0^+ ou 0^-	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{u(x)}{v(x)} =$	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0^- ou 0^+	0^- ou 0^+	FI	FI

Capacité 4 ***Déterminer une limite par règles opératoires***

Voir les capacités 3 et 4 du manuel Indice page 169.

3.4 Formes indéterminées

Il existe quatre formes indéterminées : « $\infty - \infty$ » ,« $\infty \times 0$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », $\frac{0}{0}$ ».En pratique, pour lever l'indétermination, on change de forme en factorisant par exemple par les termes prépondérants (en l'infini pour tous entiers $n > p$, x^n l'emporte sur x^p, et x^n l'emporte sur $\sqrt{x}$).

Méthode

- Pour lever une forme indéterminée de la forme $+\infty + (-\infty)$, on peut essayer de changer de forme en factorisant l'expression par le terme prépondérant. Pour une fonction polynôme, le terme prépondérant en $+\infty$ ou $-\infty$ est le terme de plus haut degré.
- Pour lever une forme indéterminée de la forme $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$, on peut factoriser le numérateur et le dénominateur par leur terme prépondérant puis simplifier le quotient des termes prépondérants.

Capacité 5 ***Lever une forme indéterminée en factorisant le terme prépondérant***

1. Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -2x^5 + 3x^4 - x + 1$.

   Déterminer la limite de h en 0, puis en $-\infty$ et enfin en $-+\infty$

2. Soit f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2;1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 + x - 2}$$

   a. Déterminer la limite de f en chacune des bornes de son ensemble de définition.

   b. Interpréter graphiquement ces limites.

Capacité 6 ***Limite et algorithme de seuil***

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est *vraie* ou *fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 1 :** La boucle ci-dessous se termine :

```python
def f(x):
    return x ** 3 - x ** 2

x = 0
while f(x) < 734:
    x = x + 1
```

- **Affirmation 2 :** La boucle ci-dessous ne se termine pas.

```python
def f(x):
    return x ** 3 - x ** 2

```

```
x = 0
while f(x) > -734:
    x = x - 1
```

- **Affirmation 3 :** La boucle ci-dessous se termine.

```
def f(x):
    return (734 * x ** 2) / (x ** 2 + 1)

x = 0
while abs(f(x) -734) > 0.001:
    x = x + 1
```

- **Affirmation 4 :**

  Même question que l'affirmation 3 mais sans la valeur absolue dans le test : `f(x)-734>0.001`.

4 Limite d'une fonction composée

4.1 Notion de fonction composée

Méthode

Soit la fonction $g : x \mapsto \sqrt{2-x}$.

☞ Décomposons le calcul de l'image de -7 par la fonction g :

$$\overset{g}{\overrightarrow{-7 \overset{u}{\longmapsto} 2-(-7) = 9 \overset{v}{\longmapsto} \sqrt{9} = 3}}$$

L'image de -7 s'obtient par enchaînement de deux fonctions :

- On calcule d'abord $u(-7) = 2-(-7) = 9$ image de -7 par la fonction $u : x \mapsto 2-x$.
- Ensuite on calcule $v(9) = 2-(-7)$ image de $u(-7)$ par la fonction $v : y \mapsto \sqrt{y}$.

☞ Et si on veut déterminer l'image de l'image de 3 par la fonction g ?

- $3 \overset{u}{\longmapsto} 2-3 = -1$
- ⚠ On ne peut pas déterminer l'image de -1, qui est négatif, par $v : y \mapsto \sqrt{y}$

L'image de 3 par la fonction g n'est pas définie car l'image de 3 par la première fonction de l'enchaînement n'appartient pas à l'intervalle de définition de la deuxième fonction v de l'enchaînement.

☞ $g(x)$, s'il est défini, s'obtient par l'enchaînement de deux fonctions :

- on part de x auquel on associe $2-x$ par la fonction $u : x \mapsto 2-x$.
- ensuite à $u(x) = 2-x$ on associe $\sqrt{u(x)} = \sqrt{2-x}$ par la fonction $v : y \mapsto \sqrt{y}$ où $2-x$ est substitué à la variable y.

On dit que g est la **composée** de la fonction u suivie de la fonction v, et on a $\boxed{g(x) = v(u(x))}$.

On note $\boxed{g = v \circ u}$ où $\circ$ est l'opérateur de **composition**.

$$x \overset{u}{\longmapsto} 2 - x \overset{v}{\longmapsto} \sqrt{2-x} \quad \text{(composée } g\text{)}$$

Définition 6

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J telles que pour tout $x \in \text{I}$ on a $u(x) \in \text{J}$.
La fonction composée u suivie de v, notée $v \circ u$, est la fonction définie sur I par $v \circ u(x) = v(u(x))$.

4.2 Limite par composition

Théorème 1 *admis*

Soit u une fonction définie sur intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J telles que $\forall x \in \text{I}, u(x) \in \text{J}$.
On peut définir sur I la fonction composée $g : x \mapsto (v \circ u)(x)$ par $g(x) = v(u(x))$.
Soit trois réels a appartenant à I (ou borne de I), b appartenant à J (ou borne de J) et c tels que :

$$\lim_{x \to a} u(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{X \to b} v(X) = c$$

alors on a par composition des limites :

$$\lim_{x \to a} v(u(x)) = c$$

Ce théorème s'applique également aux suites $(v(u_n))_{n \geqslant 0}$ définies par composition (avec $\lim_{n \to +\infty} u = b$).
On peut remplacer a, b ou c par $+\infty$ ou $-\infty$.

Capacité 7 *Déterminer une limite par composition (voir capacité 6 p.171)*

On donne le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère du plan.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$0,5$ ↗	$+\infty$

De plus on sait que :

$f(-2) = -3$ et $f(3) = 2$

On donne le tableau de variation d'une fonction g dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2\}$, on note $\mathscr{C}_g$ la courbe de g dans un repère du plan.

x	$-\infty$		-3		-2		1		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-2	↘	-5

1. Calculer $g(f(-2))$ puis déterminer un encadrement de $g\big(f(3)\big)$.

2. **a.** Que vaut $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} g(x)$? Interpréter graphiquement cette limite.

b. Tracer dans un repère une représentation possible de la courbe $\mathscr{C}_g$ avec ses droites asymptote(s)qu'on peut déduire du tableau de variation de g et sa tangente au point d'abscisse 1.

3. En justifiant déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)}$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) - f(x)$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) \times f(x)$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} g(f(x))$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} g(f(x))$
- $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(g(x))$
- $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(g(x))$

5 Limites par comparaison ou encadrement

Propriété 4 ***Passage à la limite dans une inégalité***

Soit a un réel (ou $+\infty$ ou $-\infty$), soit I un intervalle contenant a ou dont a est une borne, soit f une fonction définie sur I telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et soit k un réel.

Si pour tout réel $x \in$ I on a $f(x) < k$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant k$.

Lorsqu'on passe à la limite dans une inégalité, son sens est conservé mais elle devient une inégalité large.

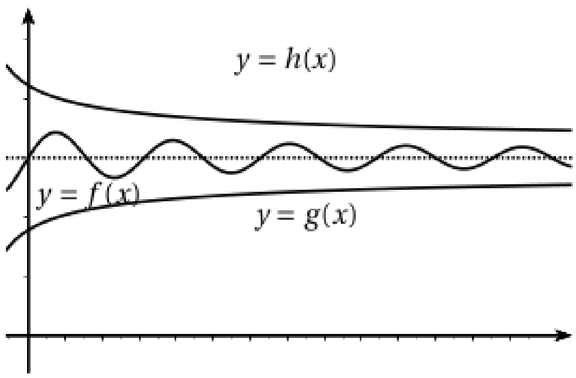
Théorème 2 ***Théorème d'encadrement dit « des gendarmes », admis***

Soient f, g, h trois fonctions définies sur un intervalle I du type $]a\,; +\infty[$ telles que :

- pour tout $x \in$ I, on ait $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = \ell$

Alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell$

Un théorème similaire permet d'obtenir une limite par encadrement lorsque x tend vers $-\infty$ ou lorsque x tend vers un réel b.

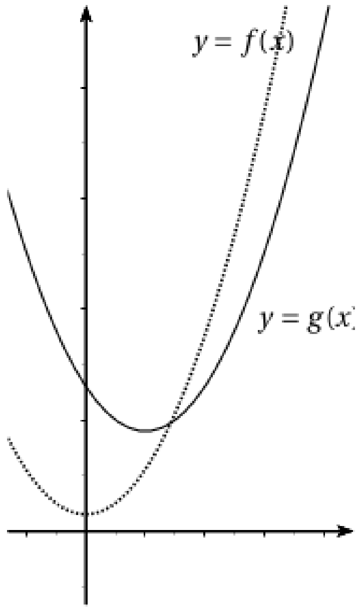


Théorème 3 ***Théorème de comparaison, même preuve que le théorème analogue pour les suites***

Soient f, g deux fonctions définies sur un intervalle I du type $]a\,;+\infty[$.

1. Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $g(x) \leqslant f(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
2. Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Un théorème similaire permet d'obtenir une limite infinie par comparaison lorsque x tend vers $-\infty$ ou lorsque x tend vers un réel b.



Capacité 8 ***Utiliser les théorèmes de limite par comparaison ou encadrement***

1. Soit f une fonction telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Déterminer les limites suivantes :

   a. $\lim\limits_{x \to +\infty} x + f(x)$ **b.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ **c.** $\lim\limits_{x \to -\infty} x + f(x)$

2. Soit la fonction g définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} + 1$.
   - **a.** Représenter graphiquement la courbe de g avec sa calculatrice et conjecturer ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
   - **b.** En utilisant un encadrement de $\sin(x)$, déterminer un encadrement de $g(x)$ pour tout réel x et en déduire les limites conjecturées.

6 Limites et exponentielle

6.1 Limites de la fonction exponentielle en $-\infty$ et $+\infty$

Propriété 5

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = \ldots.$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = \ldots.$

La droite d'équation ...... est asymptote à la courbe de la fonction exponentielle au voisinage de $-\infty$.

Démonstration ***Au programme***

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - (x+1)$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout réel x et en déduire le tableau de variations de f.

Pour tout réel x, on a : $f'(x) = e^x - 1$

- $f'(x) = 0 \iff e^x = e^0 \iff x = 0$
- $f'(x) > 0 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$
- On en déduit que :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

2. Justifier que pour tout réel x, on a $e^x \geqslant x + 1$.

Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est $f(0) = 0$

Donc pour tout réel $x \geqslant 0$, on a :

$f(x) \geqslant 0 \iff e^x \geqslant x + 1$

3. En déduire la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$.

- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$

- On a pour tout réel x, $e^x \geqslant x + 1$

Donc par comparaison, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

4. Déterminer la limite de la fonction exponentielle en $-\infty$ à l'aide du théorème de limite par composition.

Pour tout réel x, on a : $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$

On pose $y = -x$, on a $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{1}{e^y} = 0^+$ par quotient

Donc par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$

Capacité 9 ***Déterminer une limite par règles opératoires (dont composition)***

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} - e^x$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0,5t+2}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(3x + 1)e^{-3x}$

6.2 Croissances comparées entre l'exponentielle et les puissances

Propriété 6 ***Croissances comparées de e^x et x^n***

Soit n un entier naturel non nul, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

En particulier on a : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0}$.

Démonstration ***Au programme, voir manuel p. 172***

- Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. Étudier les variations de f.

. f dérivable sur $[0;+\infty[$ donc pour tout $x \geqslant 0$:
$f'(x) = e^x - \frac{1}{2} \times 2x = e^x - x$
. On a démontré que pour tout réel x, on a :
$e^x \geqslant x+1$ donc $e^x \geqslant x$
On en déduit que $f'(x) \geqslant 0$ et donc f est croissante sur $[0;+\infty[$
De plus $f(0) = 1$ donc pour tout réel $x \geqslant 0$:
$f(x) \geqslant 1$ donc $f(x) > 0 \Longrightarrow e^x > \frac{x^2}{2}$

- En déduire que pour tout réel $x > 0$ on a $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.

Pour tout réel $x > 0$, on a :
$e^x > \frac{x^2}{2}$
donc $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$
car diviser les deux membres d'une inégalité par un nombre $x > 0$ ne change pas son sens.

- En déduire la limite de $\frac{e^x}{x}$ en $+\infty$.

. Pour tout réel $x > 0$, on a $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$
. De plus $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$
. Donc par comparaison $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

- Soit n un entier naturel.

  – Justifier que pour tout réel $x > 0$, on a : $\dfrac{e^x}{x^n} = \left(\dfrac{1}{n}\dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$.

  Pour tout entier naturel n et pour tout réel $x > 0$:

  $\left(\frac{1}{n}\frac{e^{x/n}}{x/n}\right)^n = \left(\frac{e^{x/n}}{x}\right)^n = \frac{\left(e^{x/n}\right)^n}{x^n} = \frac{e^x}{x^n}$

  – En déduire la limite de $\dfrac{e^x}{x^n}$ en $+\infty$ en appliquant le théorème de limite par composition.

  Pour tout entier naturel n :

  • on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{n} = +\infty$

  • On pose $y = \frac{x}{n}$ et on a $\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$

  • Par composition, il vient $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x/n}}{x/n} = +\infty$

  • Puis par produit, il vient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{x/n}}{x/n}\right)^n = +\infty$

- Soit n un entier naturel.

  – Démontrer que pour tout réel $x < 0$, on a : $x^n e^x = (-1)^n \dfrac{(-x)^n}{e^{-x}}$.

  Pour tout entier naturel n et tout réel $x < 0$:

  $(-1)^n \times \frac{(-x)^n}{e^{-x}} = \frac{(-1 \times (-x))^n}{e^{-x}} = \frac{x^n}{e^{-x}} = x^n e^x$

  – En déduire la limite de $x^n e^x$ en $-\infty$ en appliquant le théorème de limite par composition.

  Pour tout entier naturel n :

  on a $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$

  on pose $y = -x$ et on a $\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{y^n}{e^y} = 0$ comme on l'a démontré précédemment

  Donc par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(-x)^n}{e^{-x}} = 0$.

  Et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

- Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $\dfrac{e^x}{\sqrt{x}} = \sqrt{2\dfrac{e^{2x}}{2x}}$.

  Pour tout réel $x > 0$, on a

  $\frac{2e^{2x}}{2x} = \frac{e^{2x}}{x}$ donc $\sqrt{\frac{2e^{2x}}{2x}} = \sqrt{\frac{e^{2x}}{x}} = \frac{\sqrt{e^{2x}}}{\sqrt{x}} = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$

En déduire la limite de $\dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$ en appliquant le théorème de limite par composition.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$

On pose $y = 2x$ et on a $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{e^y}{y} = +\infty$

Donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2e^{2x}}{2x} = +\infty$

Puis à nouveau par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{2e^{2x}}{2x}} = +\infty$

et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$

Capacité 10 ***Déterminer une limite avec une règle de croissances comparées***

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x - e^x$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 3)e^x$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{x}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{4x}}{x}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\cos(x)e^x}{x}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x}$

Table des matières