Capacités du cours sur le logarithme népérien

Capacité 1 *Utiliser la fonction logarithme dans un contexte*

La magnitude d'un séisme d'amplitude maximale A est mesurée *l'échelle de Richter* par $M = \dfrac{\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)}{\ln(10)}$ où A_0 est une amplitude de référence. Cette formule s'écrit souvent $M = \log\left(\dfrac{A}{A_0}\right)$ où $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ est la fonction logarithme décimal (touche Log de la calculatrice).

1. Déterminer avec la calculatrice la magnitude sur l'échelle de Richter des séismes suivants :
   - **a.** Un séisme d'amplitude A_0.
   - **b.** Un séisme d'amplitude $10A_0$.
   - **c.** Un séisme d'amplitude $20A_0$.
   - **d.** Un séisme d'amplitude $10^n A_0$ avec n entier naturel. Quelle conjecture peut-on formuler ?
   - **e.** le séisme de Barcelonnette (France 2014) d'amplitude $A = 2 \times 10^5 A_0$.
2. Exprimer en fonction de A_0 l'amplitude maximale du séisme d'Amatrice (Italie 2016) dont la magnitude était de 6,2 sur l'échelle de Richter.
3. *L'échelle de Richter* est une **échelle logarithmique**, la valeur représentée sur l'échelle est le logarithme (népérien ou décimal) de la grandeur mesurée. D'autres exemples d'échelles logarithmiques sont présentés aux exercices 92 p. 148 (magnitude d'un astre) et 173 p. 256 (intensité sonore en décibels). Quel est l'intérêt d'une échelle logarithmique par rapport à une échelle linéaire ?

$\log(1) = 0$ ← séisme a)

amplitude

$10\,A_0$

$\times 10$

$20\,A_0$

$100\,A_0$

$\times 10$

$1000\,A_0$

deg	CALCULATION
log(10)	1
log(20)	log(2)+1 ≈ 1.30103
log(100)	2
log(1000)	3

magnitude

1

$1 + \log(2) \simeq 1{,}3$

$+1$

2

$+1$

3

suite géométrique ⟷ suite arithmétique

$10^n A_0$

$\log\left(\dfrac{10^n A_0}{A_0}\right) = \log(10^n)$

$= n \log(10)$

deg CALCULATION

$\log(2\times10^5)$ — $\log(2)+5 \approx 5.30103$

$10^{6.2}$ — 1584893

relation fondamentale du logarithme

$\log(2) + \log(10^n)$

deg CALCULATION

1584893

$\log(10^{6.2})$ — 6.2

$e^{\ln(10)\times6.2}$ — 1584893

magnitude du séisme d'Amatrice

$\frac{A}{A_0}$ pour le séisme d'Amatrice

$$\text{amplitude} \xrightarrow{\text{logarithme}} \text{magnitude}$$

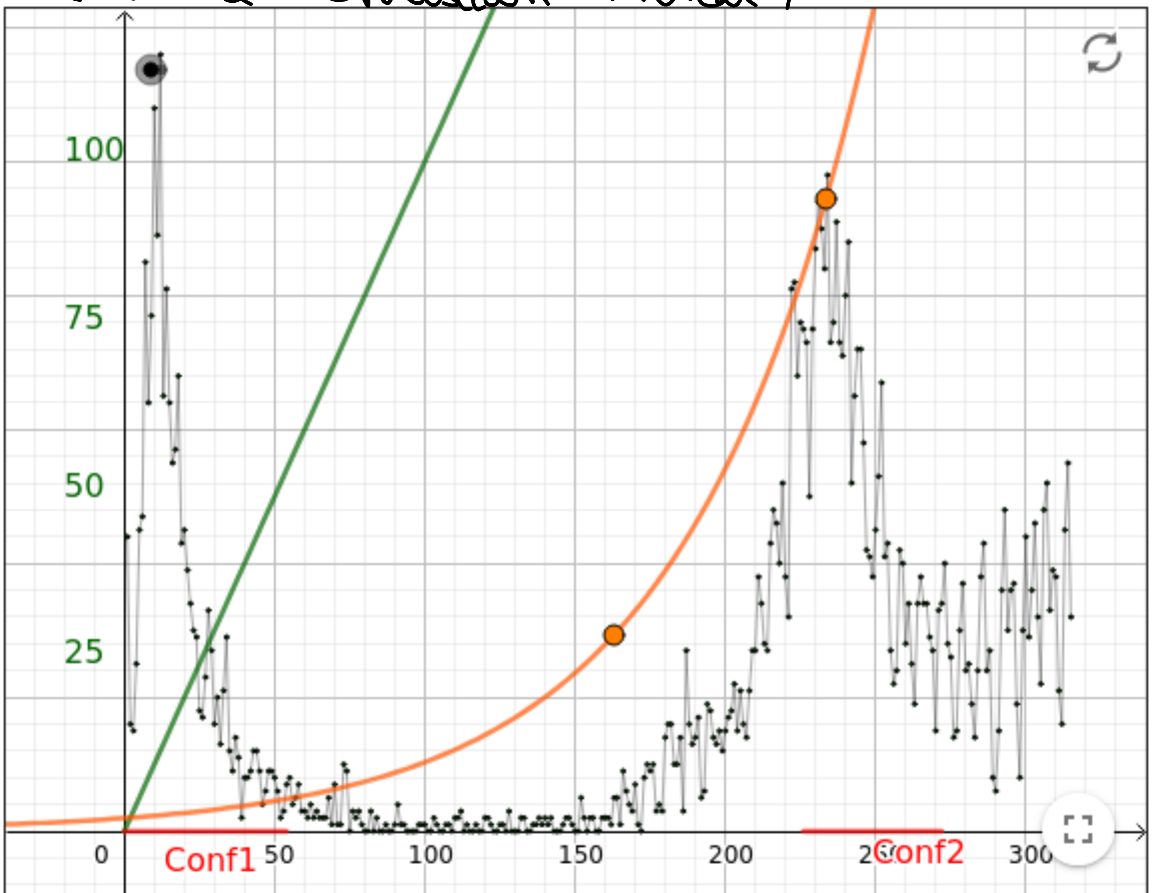
$$A \longrightarrow M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

$$\frac{A}{A_0} = 10^M = 10^{\log\left(\frac{A}{A_0}\right)}$$

ou $$\frac{A}{A_0} = e^{\ln(10)\times M} = e^{\ln(10)\times\frac{\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)}{\ln(10)}}$$

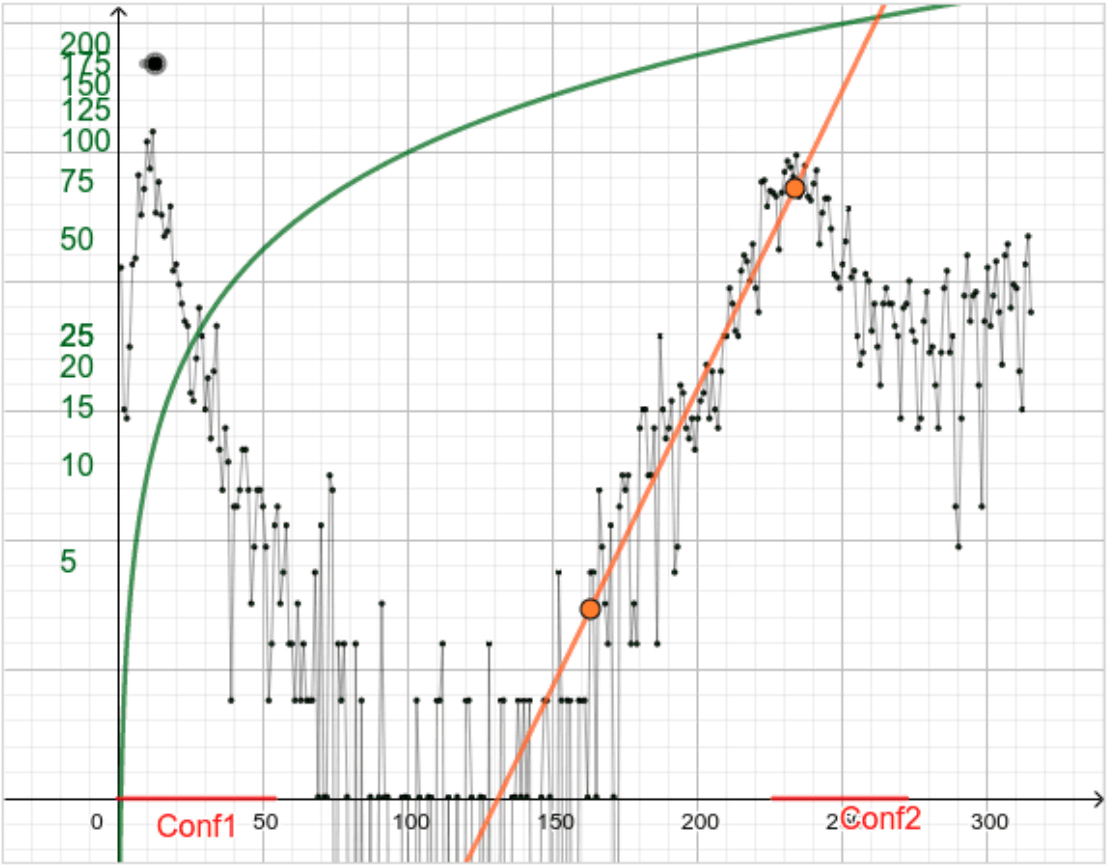
$$\text{amplitude} \xleftarrow{\text{exponentielle}} \text{magnitude}$$

3) Nombre d'admissions en réanimation en région AURA entre mars 2020 et mars 2021 (source Christian Mercat)



échelle linéaire en abscisse et en ordonnée

3) Nombre d'admissions en réanimation en région AURA entre mars 2020 et mars 2021 (source Christian Mercat)



échelle linéaire en abscisse et logarithmique en ordonnée

↳ l'évolution exponentielle avant le second confinement est mise en évidence par une relation affine entre le nombre de jours et le logarithme du nombre d'admissions

Capacité 2 ***Utiliser la définition de la fonction logarithme***

1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

   a. $f : x \longmapsto \ln(1-3x)$ b. $g : x \longmapsto \ln(x^2)$

2. Compléter les pointillés :

   a. $e^{\ln(3)} = \cdots$ c. $\ln(e^{-7}) = \cdots$ e. $\ln(e^2 \times e^3) = \cdots$

   b. $\ln(e^0) = \cdots$ d. $\ln(e^2) + \ln(e^3) = \cdots$ f. $\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \cdots$

1)

a) $f(x) = \ln(1-3x)$ définie ssi $1-3x > 0$

ssi $x < \frac{1}{3}$

$D_f =]-\infty ; \frac{1}{3}[$

b) $g(x) = \ln(x^2)$ définie ssi $x^2 > 0$

ssi $x \in]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

$D_g =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

2) a) $e^{\ln(3)} = 3$ c) $\ln(e^{-7}) = -7$ b) $\ln(e^0) = 0$

d) $\ln(e^2) + \ln(e^3) = 2 + 3 = 5$

f) $\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \ln(e^{-2}) = -2 = -\ln(e^2)$.

remarque

Capacité 3 ***Utiliser les propriétés de la fonction logarithme***

Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto x\ln(x) - x$ définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.

g dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables.

Pour tout réel $x > 0$:

$$g'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\Vert$	$\searrow$	$g(1) = 1 \times \ln(1) - 1 = -1$	$\nearrow$	

Capacité 4 ***Résoudre des équations ou inéquations avec la fonction logarithme***

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations :

1. $\ln(2x-4) < 0$
2. $\ln(2x-4) > -5$
3. $\ln(2x) \geqslant \ln(x^2-1)$
4. $(\ln x)^2 - \ln x = 6$
5. $e^{2x} - e^x = 6$
6. $(\ln x)^2 - \ln x < 6$
7. $(e^{-x})^2 - e^{-x} < 6$
8. $e^{3-2x} > 2(e^x)^2$

1) Inéquation : $\ln(2x-4) < 0$

Ensemble de résolution : $2x - 4 > 0 \iff x > 2$

$$\mathcal{D} =]2;+\infty[.$$

Résolution dans $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} \ln(2x-4) < 0 \\ 2 < x \end{cases} \iff \begin{cases} e^{\ln(2x-4)} < e^{0} \\ 2 < x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x-4 < 1 \\ 2 < x \end{cases} \iff \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ 2 < x \end{cases}$$

Ensemble des solutions : $\mathcal{S} = \left]2 ; \frac{5}{2}\right[$.

3) Inéquation : $\ln(2x) \geq \ln(x^2-1)$

Ensemble de résolution : $\begin{cases} 2x \geq 0 \\ x^2-1 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in \left]-\infty ; -1\right[\cup \left]1 ; +\infty\right[\end{cases}$

$$\iff x > 1$$

On résout dans $\mathcal{D} = \left]1 ; +\infty\right[$

Résolution dans $\mathcal{D} = \left]1 ; +\infty\right[$

$$\begin{cases} \ln(2x) \geq \ln(x^2-1) \\ 1 < x \end{cases} \iff \begin{cases} 2x \geq x^2-1 \\ 1 < x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2-2x-1 \leq 0 \\ x > 1 \end{cases}$$

Les racines de x^2-2x-1 sont $x_1 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$ et $x_2 = 1-\sqrt{2}$

$\mathcal{D}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$	
x^2-2x-1		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $]1 ; 1+\sqrt{2}]$.

2) Inéquation : $\ln(2x-4) > -5$

Ensemble de résolution : $2x-4>0 \iff x>2$

$$\mathcal{D} =]2 ; +\infty[$$

Résolution dans $\mathcal{D} =]2;+\infty[$.

$$\begin{cases} \ln(2x-4) > -5 \\ x>2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-4 > e^{-5} \\ x>2 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 2 + \dfrac{e^{-5}}{2} \\ x>2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left]2 + \frac{e^{-5}}{2} ; +\infty\right[.$$

4) Équation : $(\ln(x))^2 - \ln(x) = 6$

Ensemble de résolution : $\mathcal{D} =]0;+\infty[$

On résout dans $\mathcal{D} =]0;+\infty[$ avec un changement d'inconnue :

$$\begin{cases} (\ln(x))^2 - \ln(x) = 6 \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X^2 - X - 6 = 0 \\ X = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases}$$

$X^2 - X - 6$ a pour racines $X_1 = -2$ et $X_2 = 3$

$$\begin{cases} X^2 - X - 6 = 0 \\ X = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2 = X \\ X = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3 = X \\ X = \ln(x \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\iff x = e^{-2} \text{ ou } x = e^3$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{e^{-2}; e^3\}$

5) Équation : $e^{2x} - e^x = 6$

Ensemble de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$e^{2x} - e^x = 6 \iff \begin{cases} X^2 - X - 6 = 0 \\ X = e^x \end{cases}$$

D'après 6) :

$$\begin{cases} X^2 - X - 6 = 0 \\ X = e^x \end{cases} \iff -2 = e^x \text{ ou } 3 = e^x$$

Une exponentielle est toujours positive, donc
$e^x = -2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

et $e^x = 3 \iff x = \ln(3)$

$$S = \{ \ln(3) \}.$$

6) Inéquation : $(\ln(x))^2 - \ln(x) < 6$

Ensemble de résolution : $D =]0; +\infty[$

On résout dans $]0; +\infty[$:

$$\begin{cases} (\ln(x))^2 - \ln(x) < 6 \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X^2 - X - 6 < 0 \\ X = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases}$$

X	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$X^2 - X - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $\begin{cases} X^2 - X - 6 < 0 \\ X = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X < -2 \\ X = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} X > 3 \\ X = \ln(x) \\ x > 0 \end{cases}$

$\iff x < e^{-2}$ ou $x > e^3$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} =]-\infty ; e^{-2}[\cup]e^{3} ; +\infty[.$$

7) Inéquation : $(e^{-x})^2 - e^{-x} < 6$

Ensemble de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$(e^{-x})^2 - e^{-x} < 6 \iff \begin{cases} X^2 - X - 6 < 0 \\ X = e^{-x} \end{cases}$$

d'après question 6)

$$\iff \underbrace{\begin{cases} X < -2 \\ X = e^{-x} \end{cases}}_{\text{pas de solution car } e^{-x} > 0} \text{ ou } \begin{cases} X > 3 \\ X = e^{-x} \end{cases}$$

$$\iff e^{-x} > 3 \iff -x > \ln(3)$$

$$\iff x < -\ln(3)$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} =]-\infty ; -\ln(3)[$$

8) Inéquation : $e^{3-2x} > 2(e^x)^2$

Ensemble de résolution : $\mathbb{R}$

Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$e^{3-2x} > 2(e^x)^2 \iff e^{3-2x} > 2e^{2x}$$

$$\iff e^{3-2x} > e^{\ln(2)} e^{2x}$$

$$\iff e^{3-2x} > e^{2x+\ln(2)}$$

$$\iff 3-2x > 2x+\ln(2)$$

$$\iff \frac{3-\ln(2)}{4} > x$$

L'ensemble des solutions est donc

$$S = \left]-\infty ; \frac{3-\ln(2)}{4}\right[.$$

Algorithmique 1 ***Application de l'équation fonctionnelle du logarithme aux suites géométriques***

On estime que la population d'oiseaux d'une réserve diminue de 5% par an. Cette population est estimée en 2020 à 60000 individus.

On note u_n la population d'oiseaux en $2020+n$.

1. **a.** Justifier que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison.

   b. Compléter la fonction Python ci-dessous pour que `seuil(k)` détermine le nombre d'années minimum au bout duquel on aura $u_n < k$.

```
def seuil(k):
    u  = 60000
    n = 0
    while u >= k :
        u = 0.95*u
        n = n+1
    return n
```

   c. Avec la calculatrice, déterminer la valeur de `seuil(30000)`.

2. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.

   a. Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire la nature de (v_n).

   b. Retrouver la valeur de `seuil(30000)` en résolvant une inéquation.

1) a) Pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{5}{100}\right) \times u_n = 0,95 \times u_n$$

b)

```python
def seuil(k):
    u = 60000
    n = 0
    while u >= k:
        u = 0.95 * u
        n = n + 1
    return n

print(seuil(30000))
```

```
Python 3.8.2 (default, Dec 25 2020
21:20:57)
Type "help", "copyright", "credits"
 or "license" for more information.
>>> def seuil(k):
...     u = 60000
...     n = 0
...     while u >= k:
...         u = 0.95 * u
...         n = n + 1
...     return n
...
... print(seuil(30000))
14
>>>
```

2) a) Pour tout entier naturel $n \geq 0$:

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(0,95\ u_n)$$

$$v_{n+1} = \ln(0,95) + \ln(u_n)$$

$$v_{n+1} = \ln(0,95) + v_n$$

La suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est donc arithmétique de raison $\ln(0,95)$.

a) On résout l'inéquation :

$$u_n < 30000 \iff \ln(u_n) < \ln(30000)$$

$$u_n < 30000 \Leftrightarrow v_n < \ln(30000)$$

Or $(v_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique de raison $\ln(0{,}95)$

et de premier terme $v_0 = \ln(60000)$

donc pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$v_n = \ln(60000) + n \times \ln(0{,}95)$$

On a donc :

$$v_n < \ln(30000) \Leftrightarrow \ln(60000) + n \times \ln(0{,}95) < \ln(30000)$$

$$\Leftrightarrow n \times \ln(0{,}95) < \ln(30000) - \ln(60000)$$

or $0 < 0{,}95 < 1$ donc $\ln(0{,}95) < 1$

On a donc :

$$v_n < \ln(30000) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(30000) - \ln(60000)}{\ln(0{,}95)}$$

De plus $\ln(30000) - \ln(60000) = \ln\left(\frac{30000}{60000}\right) = \ln(0{,}5)$

donc : $v_n < \ln(30000) \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}95)}$

Or $\dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}95)} \underset{\text{arrondi}}{\simeq} 14$ donc seuil(30000) renvoie 14

Capacité 5 ***Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme pour simplifier une expression***

Exprimer en fonction de ln(3), ln(5) ou d'un entier :

1. $\ln(15)$
2. $\ln(75)$
3. $\ln(0,6)$
4. $\ln\left(e^{\ln(5/3)}e^{\ln(3)}\right)$
5. $\ln(\sqrt{15})$
6. $\ln(3^4)\ln(5e)$

1) $\ln(15) = \ln(3\times5) = \ln(3)+\ln(5)$

2) $\ln(75) = \ln(3\times5^2) = \ln(3)+\ln(5^2)$

$\ln(75) = \ln(3)+2\ln(5)$

3) $\ln(0,6) = \ln\left(\frac{6}{10}\right) = \ln\left(\frac{3}{5}\right) = \ln(3)-\ln(5)$

4) $\ln\left(e^{\ln(5/3)}e^{\ln(3)}\right) = \ln\left(e^{\ln(\frac{5}{3})+\ln(3)}\right)$

$= \ln\left(e^{\ln(\frac{5}{3}\times3)}\right)$

$= \ln\left(e^{\ln(5)}\right) = \ln(5)$

5) $\ln(\sqrt{15}) = \frac{1}{2}\ln(15) = \frac{1}{2}\ln(3\times5)$

$\ln(\sqrt{15}) = \frac{1}{2}(\ln(3)+\ln(5))$

6) $\ln(3^4)\ln(5e) = (4\ln(3))\times(\ln(5)+\ln(e))$

$\ln(3^4)\ln(5e) = 4\ln(3)\times(\ln(5)+1)$

Capacité 6 ***Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme pour étudier une suite***

On peut démontrer par récurrence qu'il existe une (u_n) définie par $u_0 = e^2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{eu_n}$. On peut alors définir la suite (v_n) pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n) - 1$.

1. Démonter que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
3. Étudier la limite de la suite (u_n).

1) Pour tout entier naturel $n \geq 0$:

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 1 = \ln(\sqrt{eu_n}) - 1$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(e\,u_n) - 1 = \frac{1}{2}(\ln(e) + \ln(u_n)) - 1$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(u_n) - 1 = \frac{1}{2}\ln(u_n) - \frac{1}{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 1) = \frac{1}{2}v_n$$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison $1/2$.

2) Pour tout entier $n \geq 0$ par propriété des suites géométriques :

$$v_n = \frac{1}{2^n} \times v_0 = \frac{1}{2^n} \times (\ln(u_0) - 1)$$

$$v_n = \frac{1}{2^n} \times (\ln(e^2) - 1) = \frac{1}{2^n}$$

Or $v_n = \ln(u_n) - 1 \iff v_n + 1 = \ln(u_n)$

$$\iff \frac{1}{2^n} + 1 = \ln(u_n)$$

$\iff u_n = e^{\frac{1}{2^n}+1} = e \times e^{\frac{1}{2^n}}$

3) $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

$\lim\limits_{X \to 0} e^X = e^0 = 1$ par continuité de la fonction exponentielle

donc par composition $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{2^n}} = e^0 = 1$

puis par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} e \times e^{\frac{1}{2^n}} = e$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$

Capacité 7 ***Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme pour résoudre une équation ou une inéquation***

1. Résoudre les équations ou inéquations suivantes en déterminant d'abord l'ensemble de résolution :

   a. $\ln(x+3) + \ln(x-2) = \ln 6$ **b.** $\ln((x+3)(x-2)) \leqslant 2\ln\left(\sqrt{6}\right)$

2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

   a. $0,8^n \leqslant 10^{-4}$ avec $n \in \mathbb{N}$ **b.** $1,02^n > 10^{2019}$

3. *Un problème de Leonhard Euler :*

   Si le nombre des hommes est doublé tous les 100 ans, quel est l'accroissement annuel ?

1) Équation : $\ln(x+3) + \ln(x-2) = \ln(6)$

Ensemble de résolution :

$$\begin{cases} x+3>0 \\ \text{et} \\ x-2>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>-3 \\ \text{et} \\ x>2 \end{cases}$$

$$\mathcal{D} =]-3;+\infty[\cap]2;+\infty[=]2;+\infty[$$

On résout dans $]2;+\infty[$:

$$\begin{cases} \ln(x+3) + \ln(x-2) = \ln(6) \\ 2<x \end{cases} \iff \begin{cases} \ln((x+3)(x-2)) = \ln(6) \\ 2<x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x+3)(x-2) = 6 \\ 2<x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+x-12=0 \\ 2<x \end{cases}$$

On détermine les racines de x^2+x-12 :

$$\Delta = b^2-4ac = 1-4\times(-12) = 49$$

$\Delta > 0$ 2 racines $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{49}}{2} = -4 \\ x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{49}}{2} = 3 \end{cases}$

Seule 3 est dans l'ensemble de résolution $]2;+\infty[$, donc :

$$\mathcal{S} = \{3\}$$

1) b) Inéquation : $\ln((x+3)(x-2)) \leq 2\ln(\sqrt{6})$

Ensemble de résolution :

$(x+3)(x-2) > 0 \iff x < -3$ ou $x > 2$

$$\mathcal{D} =]-\infty ; -3[\cup]2 ; +\infty[$$

On résout dans $]-\infty ; -3[\cup]2 ; +\infty[$

$$\begin{cases} \ln((x+3)(x-2)) \leq 2\ln(\sqrt{6}) \\ x \in \mathcal{D} \end{cases} \iff \begin{cases} (x+3)(x-2) \leq \sqrt{6}^2 \\ x \in \mathcal{D} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + x - 12 \leq 0 \\ x \in \mathcal{D} \end{cases}$$

x	$-\infty$		-4		-3	2	3		$+\infty$
x^2+x-12		$+$	0	$-$			0	$+$	

solutions

On en déduit que $\mathcal{S} =]-4 ; -3[\cup]2 ; 3[$

2) a) $0{,}8^n \leq 10^{-4} \iff \ln(0{,}8^n) \leq \ln(10^{-4})$

$\iff n\ln(0{,}8) \leq \ln(10^{-4})$

On $0 < 0{,}8 < 1$ donc $\ln(0{,}8) < 0$

On a donc :

$$0,8^n \leq 10^{-4} \iff n \geq \frac{\ln(10^{-4})}{\ln(0,8)}$$

$$\frac{\ln(10^{-4})}{\ln(0,8)} \simeq 41,3 \simeq 42 \text{ par excès}$$

Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, l'ensemble des solutions est : $[\![42;+\infty[\![$ (Intervalle d'entiers

b) $1,02^n > 10^{2019} \iff \ln(1,02^n) > \ln(10^{2019})$

$$\iff n\ln(1,02) > 2019\ln(10)$$

$1,02 > 1$ donc $\ln(1,02) > 1$

$$1,02^n > 10^{2019} \iff n > \frac{2019\ln(10)}{\ln(1,02)}$$

$$\frac{2019\ln(10)}{\ln(1,02)} \simeq 234762,8 \simeq 234763 \text{ par excès}$$

Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, l'ensemble des solutions est : $[\![234763;+\infty[\![$

3) Soit t le taux d'accroissement annuel.

t est solution de l'équation :

$$(1+t)^{100} = 2 \iff \ln\left((1+t)^{100}\right) = \ln(2)$$

$$\iff \ln(1+t) = \frac{\ln(2)}{100}$$

$$\iff 1+t = e^{\frac{\ln(2)}{100}}$$

$$\iff t = e^{\frac{\ln(2)}{100}} \quad ;$$

Le taux d'accroissement annuel est d'environ $t \simeq 0{,}00696$

soit environ $0{,}696\,\%$

Capacité 8 ***Utiliser les propriétés de la fonction logarithme***

1. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(\sqrt{e^4 x}\right)$.

   a. Justifier que pour tout réel $x>0$, on a $f(x)=2+\frac{1}{2}\ln(x)$.

   b. En déduire les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.

2. Soit g la fonction définie sur $]-\infty;0,5[$ par $g(x)=\ln(1-2x)$. Déterminer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition

3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n\geqslant 1$ par $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

   a. Démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a $\ln(u_n)=\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$.

   b. Déterminer la limite de la suite $(\ln(u_n))_{n\geqslant 1}$.

   c. En déduire, par composition, la limite de la suite (u_n).

1) f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(\sqrt{e^4 x}\right)$

a) Pour tout réel $x>0$, on a :

$$f(x)=\ln\left(\sqrt{e^4}\right)+\ln\left(\sqrt{x}\right)$$

$$f(x)=\ln(e^2)+\frac{1}{2}\ln(x)=2\ln(e)+\frac{1}{2}\ln(x)$$

$$f(x)=2+\frac{1}{2}\ln(x)$$

b) On a $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$

donc par produit puis somme on a :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

donc par produit puis somme on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2) Pour tout $x < 0{,}5$ on a :

$$g(x) = \ln(1-2x)$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} 1-2x = +\infty$

et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$

donc par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1-2x) = +\infty$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0{,}5 \\ x < 0{,}5}} 1-2x = 0^+$

et $\lim\limits_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty$

donc par composition $\lim\limits_{\substack{x \to 0{,}5 \\ x < 0{,}5}} \ln(1-2x) = -\infty$

3) a) Pour tout entier $n \geq 1$, on note :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

donc $\ln(u_n) = n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$

b) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0^+$

et $\lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$

donc par composition :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

b) Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$u_n = e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)/\left(\frac{1}{n}\right)}$$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$

et $\lim\limits_{X \to 1} e^X = e^1$ par continuité de l'exponentielle

donc par composition :

$$\lim_{n \to +\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)/\left(\frac{1}{n}\right)} = e^1$$