Somme de variables aléatoires
Capacités du cours

Capacité 1 ***Calculer une espérance, une variance, un écart type***

1. On considère la variable aléatoire Y dont la loi est donnée ci-dessous :

k	-5	1	2	10
$\mathbb{P}(Y=k)$	0,35	0,5	…	0,1

   a. Détailler les calculs de l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ de Y, de sa variance $\mathbb{V}(Y)$ et de son écart-type $\sigma(Y)$.

   b. Retrouver ces résultats avec l'éditeur de listes de la calculatrice.

2. On lance un dé à 6 faces équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X le nombre porté par la face du dessus.

   Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

3. On lance un dé à n faces équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à n et on note Y le nombre porté par la face du dessus.

   Déterminer l'espérance de la variable aléatoire Y.

1) a) $P(Y=-5)+P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=10)=1$

$\iff 0{,}35+0{,}5+P(Y=2)+0{,}1=1$

$\iff P(Y=2)=0{,}05$

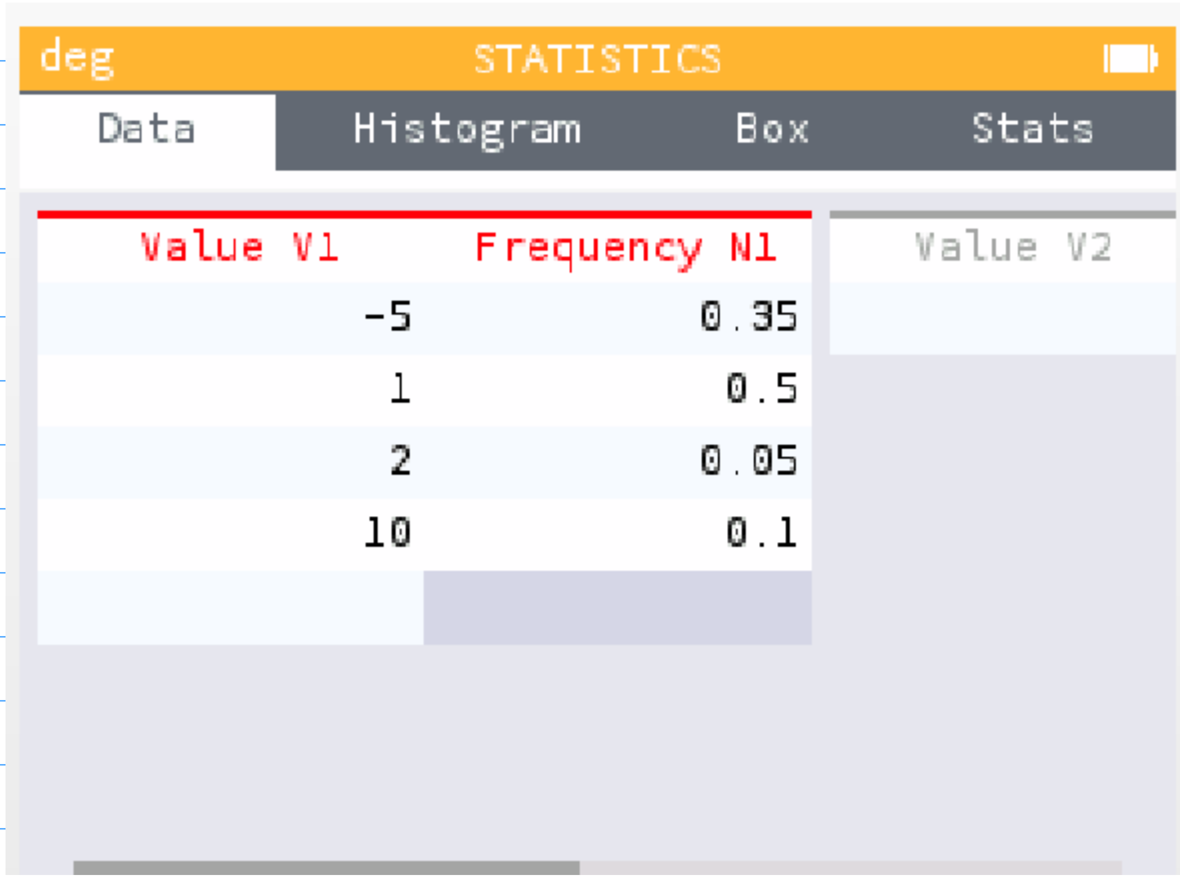
$E(Y)=-5\times0{,}35+1\times0{,}5+2\times0{,}05+10\times0{,}1$

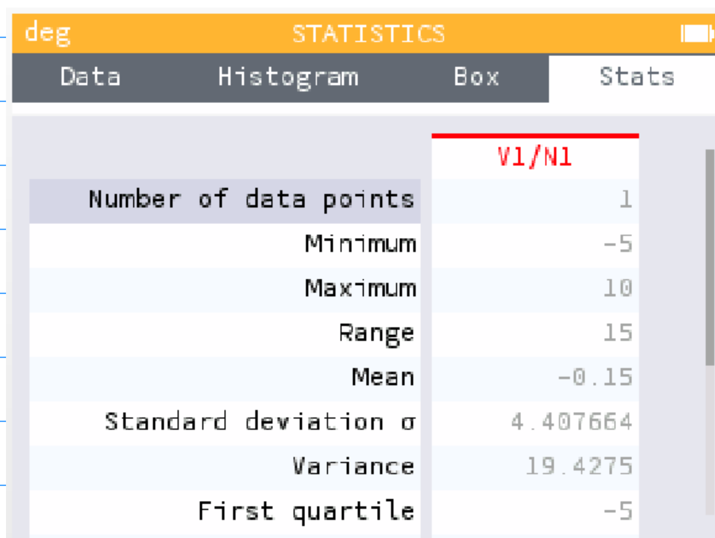
$E(Y)=-0{,}15$

$V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2$

$V(Y)=(-5)^2\times0{,}35+1^2\times0{,}5+2^2\times0{,}05+10^2\times0{,}1-(-0{,}15)^2$

$V(Y)=19{,}4275$ $\quad\sigma(Y)=\sqrt{19{,}4275}\approx4{,}41$ à 0,01 près


deg
STATISTICS
Data
Histogram
Box
Stats
Value V1
Frequency N1
Value V2
-5
0.35
1
0.5
2
0.05
10
0.1


deg
STATISTICS
Data
Histogram
Box
Stats
V1/N1
Number of data points
1
Minimum
-5
Maximum
10
Range
15
Mean
-0.15
Standard deviation σ
4.407664
Variance
19.4275
First quartile
-5

2. On lance un dé à 6 faces équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X le nombre porté par la face du dessus.

Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

Loi de probabilité de X

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = \frac{1}{6} \times (1+2+3+4+5+6) = \frac{1}{6} \times \frac{6(6+1)}{2} = \frac{7}{2}$$

$$V(X) = \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{1}{6} \times \frac{6(6+1)(2\times 6+1)}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{35}{3}}$$

3. On lance un dé à n faces équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à n et on note Y le nombre porté par la face du dessus.

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire Y.

Pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$

$$P(Y=k) = \frac{1}{n}$$

$$E(Y) = \frac{1}{n} \times (1 + 2 + \cdots + n) = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Capacité 2 ***Calculer une espérance, une variance, un écart type***

Source : *« Visa pour la prépa » de Guillaume Connan.*

Une roulette contient 36 cases numérotées de 1 à 36 dont 18 sont rouges et 18 sont noires, plus une case numérotée 0 de couleur verte.

Un joueur qui mise sur la couleur rouge ou noire gagne deux fois sa mise si la couleur choisie sort.

Un joueur qui mise sur un numéro de 1 à 36 gagne 36 fois sa mise si le numéro sort.

Il est interdit de miser sur le zéro.

1. Un joueur mise a euros sur une couleur. Soit C la variable aléatoire correspondant au gain associé. Déterminer la loi de C puis calculer $\mathbb{E}(C)$ et $\sigma(C)$.
2. Un joueur mise a euros sur un numéro. Soit N la variable aléatoire correspondant au gain associé. Déterminer la loi de N puis calculer $\mathbb{E}(N)$ et $\sigma(N)$.
3. Vaut-il mieux miser sur une couleur ou sur un numéro?

1) Une couleur étant choisie la probabilité d'obtenir cette couleur est de $\frac{18}{37}$

Loi du gain C si on mise a euros sur une couleur

Valeurs	$2\times a - a$	$-a$
Probabilités	$\frac{18}{37}$	$\frac{19}{37}$

$$E(C) = \frac{-a}{37}$$

$$\sigma(C) = \sqrt{\left(-a+\frac{a}{37}\right)^2 \times \frac{19}{37} + \left(a+\frac{a}{37}\right)^2 \times \frac{18}{37}}$$

$$\sigma(C) = \frac{6a\sqrt{38}}{37}$$

2) Un joueur mise a euros sur un numéro
Un numéro étant fixé :

Valeur	$36a - a$	$-a$
Probabilité	$\frac{1}{37}$	$\frac{36}{37}$

$$E(N) = 35a \times \frac{1}{37} - \frac{36a}{37} = \frac{-a}{37}$$

On a $E(C) = E(N)$

Mais $\sigma(N) = \sqrt{\left(-a+\frac{a}{37}\right)^2 \times \frac{36}{37} + \left(35a+\frac{a}{37}\right)^2 \times \frac{1}{37}}$

$$\sigma(N) = \frac{216a}{37}$$

3) On a $E(C) = E(N)$

mais $\sigma(N) \approx 6\,\sigma(C)$

Il est donc beaucoup + risqué de miser sur un numéro

Capacité 3 ***Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème***

1. Le nombre de spectateurs pour un festival de musique définit une variable aléatoire X d'espérance 12 000 et de variance 1 500. Chaque billet est vendu au tarif de 45 € et le coût global d'organisation du festival est de 100 000 €.

   Soit B la variable aléatoire associée au bénéfice réalisé par l'organisateur du spectacle.

   Déterminer $\mathbb{E}(B)$ et $\sigma(B)$.

2. On considère que pour la session 2 020 d'un concours, la note X sur 10 attribuée à un candidat pris au hasard, aura pour espérance $\mathbb{E}(X) = 5{,}4$ et pour écart-type $\sigma(X) = 2$

   Le responsable du concours veut obtenir une moyenne de 5 avec un écart-type de 1,5. Ainsi, il veut appliquer une transformation affine à X en lui associant $aX + b$ avec a et b des réels et $a > 0$.

   a. Exprimer $\mathbb{E}(aX + b)$ et $\sigma(aX + b)$ en fonction de a et b.

   b. En déduire le calcul de a et b.

1) Bénéfice = Recette − Coût

Bénéfice = Prix Unitaire × Quantité − Coût

$B = 45X - 100000$

Par linéarité de l'espérance, on a :

$E(B) = 45\,E(X) - 100000$

$E(B) = 440\,000$

Pour l'écart-type, on a : $\sigma(B) = \sigma(45X - 100000)$

$\sigma(B) = 45\,\sigma(X)$ par propriété de l'écart-type

2) Données : $E(X) = 5,4$ et $\sigma(X) = 2$

Soit $aX+b$ la nouvelle loi des notes

a) $E(aX+b) = aE(X) + b = 5,4a + b$

$\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$

$a > 0$ donc $\sigma(aX+b) = a\sigma(X)$

$\sigma(aX+b) = 2a$

a et b solutions du système :

$$\begin{cases} 5,4a + b = 5 \\ 2a = 1,5 \end{cases} \iff \begin{cases} 5,4 \times 0,75 + b = 5 \\ a = \dfrac{1,5}{2} = 0,75 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = 5 - 5,4 \times 0,75 = 0,95 \\ a = 0,75 \end{cases}$$

Capacité 4 ***Déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires plus simples, capacité 1 p. 403 du manuel indice***

Agathe lance deux pièces de monnaie, l'une de 1 € et l'autre de 2 €

X est la variable aléatoire qui vaut 1 si elle obtient Pile avec la pièce de 1 € et 0 sinon.

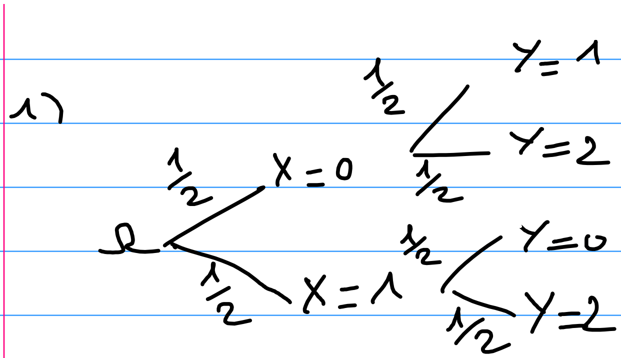
Y est la variable aléatoire qui vaut 2 si elle obtient Pile avec la pièce de 2 € et 0 sinon.

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Compléter le tableau ci-contre et en déduire la loi de probabilité de $X+Y$.

X \ Y	1	2	Loi de X
0	1	2	$\frac{1}{2}$
1	2	3	$\frac{1}{2}$
Loi de Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

1)



$P(X=0 \text{ et } Y=1) = \frac{1}{4}$

$P(X=0 \text{ et } Y=2) = \frac{1}{4}$

$P(X=1 \text{ et } Y=0) = \frac{1}{4}$

$P(X=1 \text{ et } Y=2) = \frac{1}{4}$

Loi de probabilité de $X+Y$:

$P(X+Y=0) = P(X=0 \text{ et } Y=1) = \frac{1}{4}$

$P(X+Y=2) = P(X=0 \text{ et } Y=2) + P(X=1 \text{ et } Y=1)$

$P(X+Y=2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$P(X+Y=3) = 1 - P(X+Y=0) - P(X+Y=2)$

$P(X+Y=3) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Capacité 5 ***Calculer l'espérance et d'une variable aléatoire avec la propriété de linéarité, capacité 2 p. 403 du manuel Indice***

1. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers fini.

   On sait que $\mathbb{E}(X) = 3$ et $\mathbb{E}(Y) = 4$.

   Déterminer l'espérance des variables aléatoires :

   $X+Y$, $X+Y+1$, $X-Y$, $X+X$, $\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y$ et $aX+(1-a)Y$ où a est un réel.

2. Soit S_n la variable aléatoire qui représente le nombre de piles obtenus lorsqu'on lance une pièce équilibrée n fois.

   a. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie une réalisation de S_n :

```
from random import randint

def lancer():
    #renvoie 1 pour pile et 0 pour face (pièce équilibrée)
    return randint(0, 1)

def S(n):
    compteur = 0
    for k in range(n):
        compteur = ..compteur + lancer()
    return compteur
```

   b. Déterminer l'espérance de S_n.

1) On considère deux variables aléatoires X et Y telles que :

$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 3+4 = 7$

$E(X+Y+1) = E(X+Y)+1 = 8$

$E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 3-4 = -1$

$E(X+X) = E(X) + E(X) = 2\times 3 = 6$

$E\left(\frac{1}{3}X + \frac{1}{2}Y\right) = \frac{1}{3}E(X) + \frac{1}{2}E(Y) = \frac{1}{3}\times 3 + \frac{1}{2}\times 4 = 3$

$E(aX + (1-a)Y) = aE(X) + (1-a)E(Y) = 3a + 4(1-a) = 4-a$

2) $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ où pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$ X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$:

k	0	1
$P(X_1=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Par linéarité de l'espérance appliquée $n-1$ fois :

$E(X_1+\dots+X_n) = nE(X_1) = n\times\frac{1}{2}$

Capacité 6 ***Calculer la variance d'une variable aléatoire en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes***

1. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers fini.

   On sait que $\mathbb{V}(X) = 3$ et $\mathbb{V}(Y) = 4$. ↳ indépendantes

   Déterminer la variance des variables aléatoires :

   $X+Y, X+Y+1$, $X-Y, X+X$, $\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y$ et $aX+(1-a)Y$ où a est un réel.

2. Soit S_n la variable aléatoire qui représente le nombre de piles obtenus lorsqu'on lance une pièce équilibrée n fois.

   Déterminer la variance de S_n.

Cette fois les variables aléatoires sont indépendantes.

1) X et Y des variables aléatoires indépendantes

$V(X+Y) = V(X)+V(Y) = 7$

$V(X+Y+1) = V(X) + V(Y+1) = V(X)+V(Y) = 4+3 = 7$

$V(X-Y) = V(X)+V(-Y) = V(X)+(-1)^2V(Y) = 4+3 = 7$

On admet que si X et Y sont indépendantes alors X et $-Y$ sont indépendantes.

$V(\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y) = V(\frac{1}{3}X)+V(\frac{1}{2}Y) = \frac{1}{3^2}V(X)+\frac{1}{2^2}V(Y) = \frac{1}{9}\times 3+\frac{1}{4}\times 4$

$V(\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y) = \frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3}$

$V(aX+(1-a)Y) = V(aX)+V((1-a)Y)$

$= a^2V(X)+(1-a)^2V(Y)$

$V(aX+(1-a)Y) = a^2\times 3+(1-a)^2\times 4 = 7a^2+4-8a$

2) $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ où pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$ X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$

On peut admettre que les X_k avec $k \in [\![1, n]\!]$ sont mutuellement indépendants.

Par récurrence, en appliquant successivement la propriété de la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes, on obtient :

$$V(X_1+X_2+\dots+X_n) = V(X_1)+V(X_2)+\dots+V(X_n)$$

avec $V(X_1) = V(X_2) = \dots = V(X_n) = p(1-p) = \frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

donc $V(X_1+X_2+\dots+X_n) = \frac{1}{4}\times n$

Activité 1 p. 120 Manuel Indice

Jeux de cartes en double

Un joueur tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes, puis tire une seconde carte dans un autre jeu de 32 cartes.

On note X la variable aléatoire qui, au premier tirage, associe un gain de 2 € si la carte tirée est un as, un gain de 1 € si la carte tirée est une carte « habillée » (roi, dame, valet), et rien du tout dans les autres cas.

On note Y la variable aléatoire qui, au second tirage, associe un gain de 1 € si la carte tirée est un pique, et rien du tout dans les autres cas.

On appelle Z la variable aléatoire qui, à chaque double tirage, associe le gain total du joueur.

On peut noter cette variable : $Z = X + Y$.

1 Déterminer les valeurs prises par X, par Y et par Z.

2 Donner la loi de X et la loi de Y.

3 **a.** Exprimer l'événement $\{Z = 0\}$ en fonction des événements $\{X = 0\}$ et $\{Y = 0\}$.

b. En utilisant l'indépendance des deux épreuves, déterminer $P(Z = 0)$.

c. Calculer de la même façon $P(Z = 3)$.

4 **a.** Déterminer $P(Z = 1)$ en exprimant l'événement $\{Z = 1\}$ comme réunion de deux événements incompatibles.

b. En déduire $P(Z=2)$, puis la loi de Z.

5 Calculer l'espérance et la variance des variables X, Y et Z. Que constate-t-on ?

1)

k	2	1	0
$P(X=k)$	$\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$	$\frac{12}{32}=\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

k	1	0
$P(Y=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Lois de X et Y

Valeurs prises par $Z = X+Y$

$X \backslash Y$	0	1
0	$0+0=0$	$0+1=1$
1	$1+0=1$	$1+1=2$
2	$2+0=2$	$2+1=3$

3)

$\{Z=0\} = \{X=0 \text{ et } Y=0\}$

or les deux tirages sont indépendants, donc

$P(\{Z=0\}) = P(\{X=0\}) \times P(\{Y=0\})$

$P(\{Z=0\}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

De même on a :

$$\{Z=3\} = \{X=2 \text{ et } Y=1\}$$

Par indépendance des variables aléatoires X et Y, il vient :

$$P(\{Z=3\}) = P(\{X=2\}) \times P(\{Y=1\})$$

$$\boxed{P(\{Z=3\}) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}}$$

4) a)

$$\{Z=1\} = \{X=0 \text{ et } Y=1\} \cup \{X=1 \text{ et } Y=0\}$$

Par indépendance des variables aléatoires X et Y :

$$P(\{X=0 \text{ et } Y=1\}) = P(\{X=0\}) \times P(\{Y=1\})$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

et $P(\{X=1 \text{ et } Y=0\}) = P(\{X=1\}) \times P(\{Y=0\})$

donc $P(\{X=1 \text{ et } Y=0\}) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{32}$

$\{X=0 \text{ et } Y=1\}$ et $\{X=1 \text{ et } Y=0\}$ sont incompatibles, donc :

$$\boxed{P(\{Z=1\}) = \frac{1}{8} + \frac{9}{32} = \frac{13}{32}}$$

De :

$$P(Z=0) + P(Z=1) + P(Z=2) + P(Z=3) = 1$$

on déduit que

$$P(Z=2) = 1 - P(Z=0) - P(Z=1) - P(Z=3)$$

donc

$$P(Z=2) = 1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{32} - \frac{13}{32}$$

donc $P(Z=2) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$

Loi de Z :

k	$P(Z=k)$
0	$3/8 = 12/32$
1	$13/32$
2	$6/32$
3	$\frac{1}{32}$

4) On a $E(X) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

$$E(Y) = \frac{1}{4}$$

$$E(Z) = \frac{13}{32} + 2 \times \frac{6}{32} + 3 \times \frac{1}{32}$$

$$= \frac{28}{32} = \frac{7}{8}$$

On remarque que :

$$E(X) + E(Y) = \frac{5}{8} + \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$$

est égal à $E(Z) = E(X+Y) = \frac{7}{8}$

C'est la linéarité de l'espérance.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

En calculant $V(Z) = V(X+Y)$

on observe que $V(Z) = V(X) + V(Y)$

Activité 2 p. 120 Manuel Indice

Tombola de clés USB

Un sac contient cinq clés USB dont deux clés d'une valeur de 10 € et trois clés d'une valeur de 30 €. À l'issue d'une épreuve sportive, le vainqueur tire au hasard dans ce sac une clé USB puis, sans remettre la clé dans le sac, il tire une seconde clé.

On note X la variable aléatoire qui, au premier tirage associe le prix de la clé obtenue, et Y la variable aléatoire qui, au second tirage, associe le prix de la clé obtenue. On note S la variable aléatoire qui, aux deux tirages, associe la somme des prix des clés gagnées.

1 Quelles sont les valeurs prises par S ?

2 **a.** Déterminer la loi de X.

b. Calculer son espérance et sa variance.

3 **a.** Construire un arbre pondéré modélisant cette expérience aléatoire.

b. Calculer $P(Y = 10)$ à l'aide de l'arbre pondéré.

c. En déduire la loi de probabilité de Y.

d. Calculer l'espérance et la variance de Y.

4 **a.** Calculer $P(S = 20)$, puis $P(S = 60)$.

b. Déterminer la loi de probabilité de S.

c. Calculer l'espérance et la variance de S. Que constate-t-on ?

1) Valeurs possibles pour $S = X + Y$

$X \backslash Y$	10	30
10	$10+10=20$	$10+30=40$
30	$30+10=40$	$30+30=60$

2) a) Loi de X :

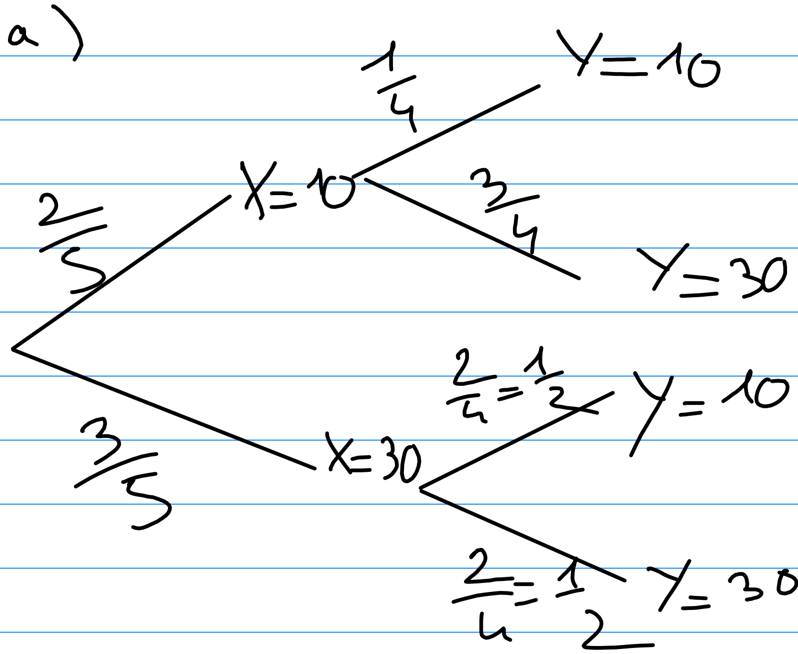
k	10	30
$P(X=k)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

b) $E(X) = 10 \times \frac{2}{5} + 30 \times \frac{3}{5} = \frac{110}{5} = 22$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{5} \times 10^2 + \frac{3}{5} \times 30^2 - 22^2$

$V(X) = 96$

3) a)



X	Y	S=X+Y
10	10	20
10	30	40
30	10	40
30	30	60

b) On applique la formule des probabilités totales pour calculer $P(Y=10)$:

$$P(Y=10) = P(X=10) \times P_{(X=10)}(Y=10) + P(X=30) \times P_{(X=30)}(Y=10)$$

$$P(Y=10) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10}$$

$$P(Y=10) = \frac{2}{5}$$

c) On en déduit que $P(Y=30) = 1 - P(Y=10)$
$= \frac{3}{5}$

Loi de probabilité de Y :

k	10	30
$P(Y=k)$	2/5	3/5

on remarque que X et Y suivent la même loi ce qui est normal.

On a donc $V(Y) = V(X) = 96$

et $E(Y) = E(X) = 22$

10)

$\{S=20\} = \{X=10 \text{ et } Y=10\}$

donc $P(S=20) = P(X=10) \times P_{(X=10)}(Y=10)$

$P(S=20) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

$\{S=60\} = \{X=30 \text{ et } Y=30\}$

donc $P(S=60) = P(X=30) \times P_{(X=30)}(Y=30)$

$P(S=60) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

On a : $P(S=60) + P(S=20) + P(S=40) = 1$

donc $P(S=40) = 1 - P(S=20) - P(S=60)$

$$= 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10}$$

$$P(S=40) = \frac{6}{10}$$

Loi de Z :

k	20	40	60
$P(Z=k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$E(Z) = 20 \times \frac{1}{10} + 40 \times \frac{6}{10} + 60 \times \frac{3}{10}$$

$$E(Z) = \frac{260}{10} + \frac{180}{10} = \frac{440}{10} = 44$$

$$V(Z) = 20^2 \times \frac{1}{10} + 40^2 \times \frac{6}{10} + 60^2 \times \frac{3}{10} - (E(Z))^2$$

$$V(Z) = 40 + 960 + 1080 - 44^2 = 144$$

On remarque que :

$$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2E(X)$$

mais $V(Z) = V(X+Y) = 144$
n'est pas égal à $V(X)+V(Y) = 2\times 96$
$= 192$

Capacité 7 ***Simuler un échantillon d'une loi de probabilité***

On dispose d'une urne qui contient des boules indiscernables au toucher : trois sont numérotées 0, deux sont numérotées 1 et une est numérotée 2.
Y est la variable aléatoire qui donne le numéro d'une boule tirée dans cette urne.
Les codes Python de cette capacité sont disponibles dans cette activité Capytale.

1. Déterminer la loi de probabilité de Y, son espérance et sa variance.
2. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle simule une réalisation de Y :

```
from random import randint

def Y():
    alea = randint(1, 6)
    if alea <= 3:
        return ....0.....
    elif alea <= 5:
        return .....1...
    else:
        return ....2..
```

3. Soit n un entier naturel non nul, compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie un échantillon de taille n de la loi suivie par la variable aléatoire Y :

```
def echantillon_Y(n):

    return [...Y( )........... for k in range(n)]
```

4. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire moyenne $M_n = \dfrac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}$ où $(Y_1, X_2, \ldots, Y_n)$ est un échantillon de taille n de la loi suivie par la variable aléatoire Y :

```
def moyenne_Y(n):
    echantillon = echantillon_Y(n)
    somme = 0
```



```
    for resultat in echantillon:
        somme = somme + ..resultat.........
    return ..somme../.n......
```

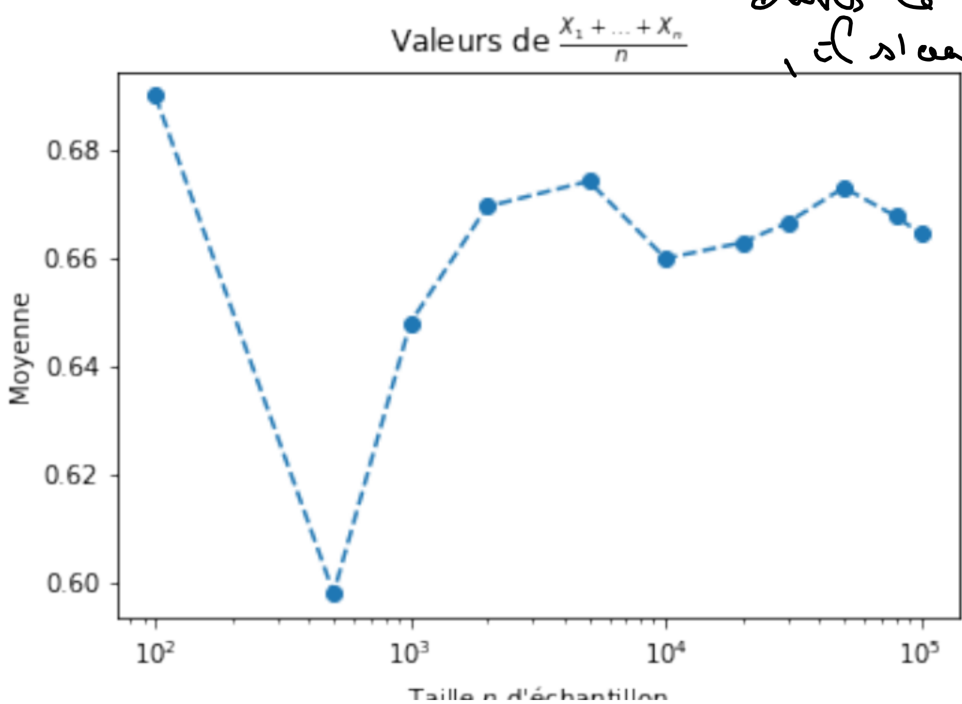
5. On a réalisé un graphique semi-logarithmique de valeurs de la variable aléatoire moyenne M_n pour des tailles n d'échantillon croissantes.

Comment sont repérées les tailles en abscisse ? par leur logarithme décimal

Quelle conjecture peut-on faire sur les valeurs de M_n lorsque n est grand ? On peut conjecturer que les réalisations de M_n (moyennes empiriques) tendent vers $\frac{2}{3}$ lorsque n tend vers $+\infty$ (mais dans un sens que nous préciserons dans le dernier chapitre, il s'agit d'une convergence en probabilité donnée par la loi faible des grands nombres).

```
def graphique_moyenne_Y_semilog(liste_taille):
    liste_moyenne = [moyenne_Y(n) for n in liste_taille]
    plt.semilogx(liste_taille,liste_moyenne,ls='--',marker='o')
    plt.xlabel(r"Taille $n$ d'échantillon")
    plt.ylabel('Moyenne')
    plt.title(r'Valeurs de $\frac{X_{1}+ \ldots +X_{n}}{n}$')
    plt.savefig('graphique_moyennes.png')
    plt.show()

graphique_moyenne_Y_semilog([100, 500, 1000, 2000, 5000, 10000,
     20000, 30000, 50000, 80000, 100000])
```

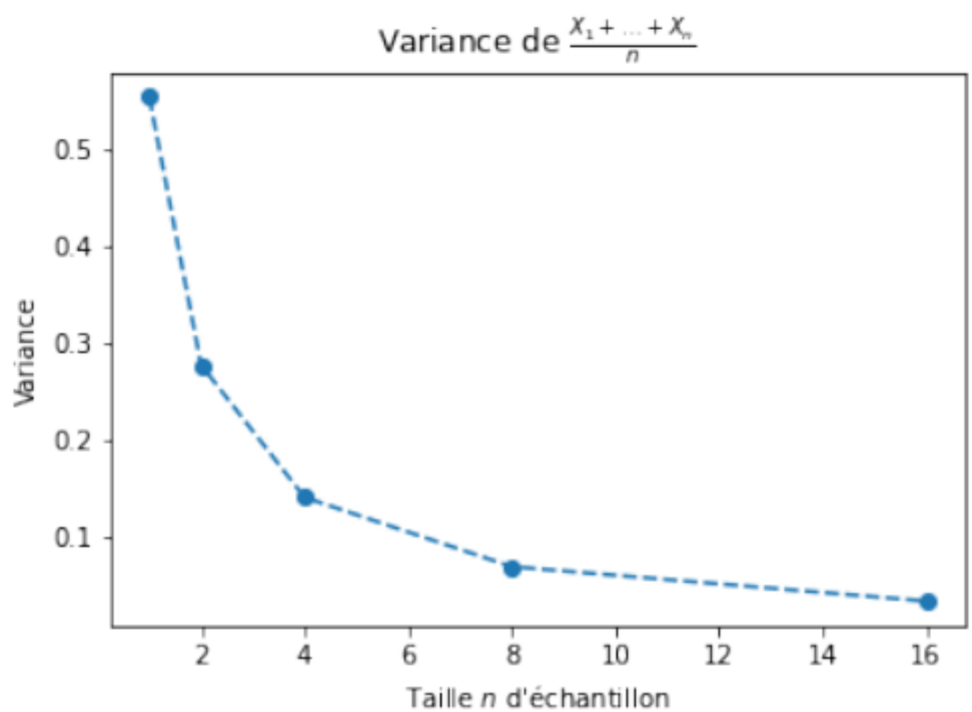


```python
def variance(echantillon):
    """Calcule la variance d'un échantillon (formule de Konig)"""
    somme_carre = 0
    somme = 0
    for resultat in echantillon:
        somme_carre = somme_carre + resultat ** 2
        somme = somme + resultat
    return somme_carre/len(echantillon) - (somme/len(echantillon)) ** 2

def variance_echantillon_moyenne_Y(n, m):
    return variance([moyenne_Y(n) for k in range(m)])

def graphique_variance_moyenne_Y(liste_taille):
    liste_variance = [ variance_echantillon_moyenne_Y(n, 10000) for n in liste_taille]
    plt.plot(liste_taille, liste_variance, ls='--', marker='o')
    plt.show()

graphique_variance_moyenne_Y([2 ** k for k in range(0, 5)])
```



On peut conjecturer que $V(M_n)$ tend vers 0 lorsque la taille de l'échantillon n tend vers $+\infty$.

Capacité 8 ***Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples, capacité 3 p. 405 du manuel Indice***

Source : « *Visa pour la prépa* » de Guillaume Connan.

On considère 6 dés à six faces numérotées de 1 à 6, cinq étant équilibrés. Le dernier est pipé de sorte que la probabilité de chaque face est proportionnelle à sa valeur.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire donnant le résultat du dé truqué lorsqu'on le lance.
2. On réalise n tirages successifs et indépendants d'un dé parmi six.
   a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire donnant le nombre fois où on a tiré le dé truqué ?
   b. Combien de tirages doit-on effectuer pour que la probabilité d'avoir obtenu le dé truqué parmi ceux tirés soit supérieure ou égale à 0, 5 ?

1) Loi de probabilité de la variable aléatoire Y donnant le résultat du dé truqué.

k	1	2	3	4	5	6
$P(Y=k)$	x	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$	$6x$

$$\sum_{k=1}^{6} P(Y=k) = 1 \iff x(1+2+3+4+5+6) = 1$$
$$\iff x \times 6 \times \frac{1+6}{2} = 1$$
$$\iff x = \frac{1}{21}$$

2) a) Le tirage d'un dé parmi 6 est une épreuve de Bernoulli dont le succès : "Tirer un dé truqué" a pour probabilité $p = \frac{1}{6}$

Le nombre X de succès obtenus sur un échantillon de n tirages suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{6}$.

b) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geqslant 0{,}5 \iff 0{,}5 \geqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n \iff \ln(0{,}5) \geqslant n \ln\left(\frac{5}{6}\right)$$
$$\iff \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(5/6)} \leqslant n$$

A partir du 4ème tirage, la probabilité d'obtenir le dé truqué parmi ceux tirés est $\geqslant 95$.

Capacité 9 ***Utiliser la somme et la moyenne d'un échantillon de taille n, capacité 4 p. 405 du manuel Indice***

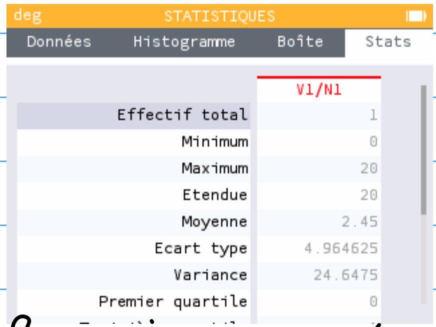
Chaque jour, Erno résout une fois le Rubik's Cube. X est l'écart, en secondes, entre le temps qu'il réalise et son meilleur temps. Voici la loi de probabilité de X :

k	0	1	2	10	20
$\mathbb{P}(X=k)$	0,5	0,25	0,1	0,1	0,05

1. Déterminer l'espérance et l'écart-type de l'écart quotidien moyen sur une dizaine de jours.

2. Reprendre les calculs précédents mais sur 20 puis trente puis cinquante jours. Que peut-on remarquer?

1)



$E(X) = 2{,}45$ $\quad V(X) \simeq 24{,}6475$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Pour tout entier $n \geqslant 1$

soit $M_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$

où $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est un échantillon de la loi suivie par X

D'après une propriété du cours, on a.

$E(M_n) = E(X)$ et $V(M_n) = \dfrac{V(X)}{n}$

2)

n	$E(M_n) = E(X)$	$V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$
10	2,45	$\simeq 2{,}46475$
20	2,45	$\simeq 1{,}2324$
30	2,45	$\simeq 0{,}8216$
50	2,45	$\simeq 0{,}4930$

On peut remarquer que la variance et donc la fluctuation d'échantillonnage diminue avec la taille de l'échantillon.