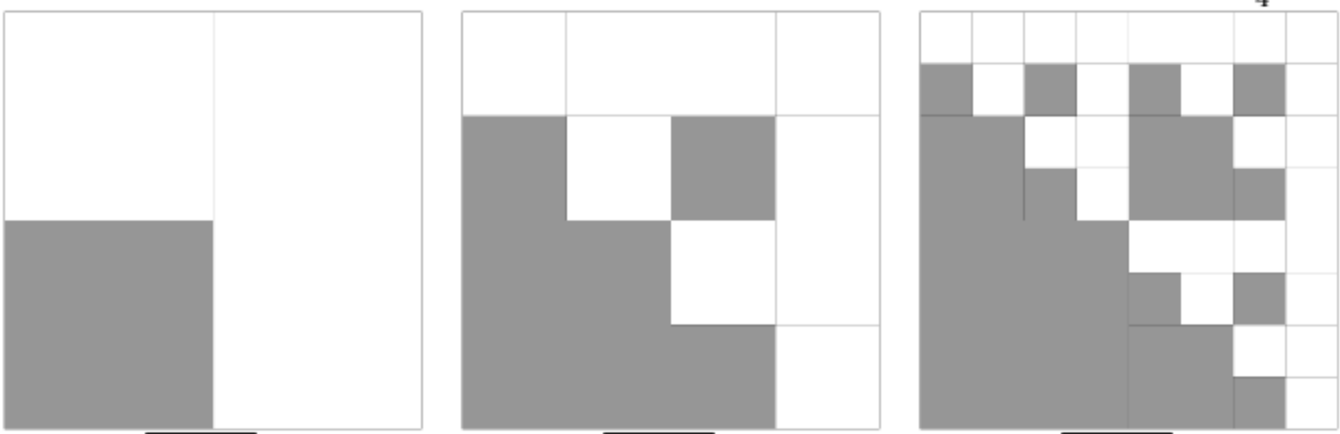
Capacités du chapitre 2

Capacité 1 ***Conjecturer la limite d'une suite définie par un motif géométrique***

On colorie un carré en plusieurs étapes :

- Étape 1 : on partage le carré en quatre carrés de même aire et on colorie le carré en bas à gauche;
- Étape 2 : on partage chaque carré non coloriée en quatre en quatre carrés de même aire et on colorie le carré en bas à gauche;
- Étapes suivantes : on répète le procédé avec chaque carré non colorié obtenu à l'étape précédente.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit b_n la fraction du carré initial qui n'est pas coloriée à l'étape n, ainsi $b_1 = \frac{3}{4}$.



Étape 1 — Étape 2 — Étape 3

1. Pour tout entier $n \geqslant 0$, exprimer b_{n+1} en fonction de b_n et en déduire la nature de la suite (b_n).
2. Pour tout entier $n \geqslant 0$, déterminer une formule explicite de b_n.
3. Conjecturer avec la calculatrice si la suite (b_n) possède une limite finie.
4. Écrire une fonction Python qui retourne le nombre d'étapes nécessaires pour que 99% du carré initial soit colorié.

1) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$b_{n+1} = \frac{3}{4} \times b_n$$

On en déduit que la suite (b_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

2) D'après une propriété du cours, pour tout entier $n \geqslant 0$: $b_n = b_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

donc $b_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ car $b_0 = 1$

3) Avec la calculatrice on peut conjecturer que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$

4)

```python
# Type your text here
#u(0) = 1
#u(n+1)= 0.75 * u(n)
# recherche du plus petit entier
#n tel que u(n) <= 0.01

def seuil(s):
  u = 1
  n = 0
  while u > s:
    u = 0.75 * u
    n = n + 1
  return n

print(seuil(0.01))
```

deg PYTHON

```
>>> from chapitre2_capacite1 -
17
>>> |
```

Relancer Sauvegarder

Capacité 2 ***Utiliser la définition d'une suite convergente***

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.

   a. La suite (u_n) est-elle monotone ? Justifier.

   b. Quelle limite peut-on conjecturer pour la suite (u_n) ?

   c. Déterminer à partir de quel rang, on a $u_n \in]-10^{-3} ; 10^{-3}[$. $]1-10^{-3} ; 1+10^{-3}[$

   d. À partir de la définition, démontrer que (u_n) converge.

2. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $v_n = 1 - \dfrac{(-1)^n}{n}$.

   a. La suite (v_n) est-elle monotone ? Justifier.

   b. Conjecturer la limite de (v_n) puis démontrer qu'elle converge à partir de la définition.

3. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = (-1)^n$.

1) a) Démontrons que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante :

Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{n+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

donc $u_{n+1} - u_n > 0$

La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est donc strictement croissante

deg SUITES

Suites | Graphique | Tableau

Régler l'intervalle

n	u_n
1	0
2	0.5
3	0.6666667
4	0.75
5	0.8
6	0.8333333
7	0.8571429
8	0.875

b) Avec le tableur de la calculatrice, on peut conjecturer que (u_n) converge vers 1.

c) Déterminons s'il existe un plus petit entier naturel $n \geq 1$ tel que :

$$u_n \in \left]1-10^{-3} ; 1+10^{-3}\right[$$

On raisonne par équivalences :

$$u_n \in \left]1-10^{-3} ; 1+10^{-3}\right[\iff 1-10^{-3} < 1-\frac{1}{n} < 1+10^{-3}$$

$$\iff 10^{-3}-1 > \frac{1}{n}-1 > -1-10^{-3}$$

$$u_n \in \left]1-10^{-3} ; 1+10^{-3}\right[\iff 10^{-3} > \frac{1}{n} > -10^{-3}$$

On sait que n entier naturel non nul, donc :

$$u_n \in \left]1-10^{-3} ; 1+10^{-3}\right[\iff 10^{-3} > \frac{1}{n} > 0$$

$$\boxed{u_n \in \left]1-10^{-3} ; 1+10^{-3}\right[\iff 10^{3} < n}$$

A partir du rang $10^3+1 = 1001$, on aura $u_n \in \left]1-10^{-3} ; 1+10^{-3}\right[$.

d) On démontre de même qu'en c) que pour tout réel $a>0$, l'entier n_a immédiatement supérieur à $\frac{1}{a}$ est telle que pour tout entier $n \geq n_a$, $u_n \in \left]1-a ; 1+a\right[$

Ainsi la suite (u_n) vérifie la définition d'une suite qui converge vers 1.

2) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $v_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$

a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} = -(-1)^{n+1} \times \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)$$

donc $v_{n+1} - v_n = (-1)^{n+1} \times \frac{2n+1}{n(n+1)}$

On a $\frac{2n+1}{n(n+1)} > 0$ donc $v_{n+1} - v_n$ du signe de $(-1)^{n+1}$. Mais $(-1)^{n+1}$ n'est pas de signe constant, car son signe dépend de la parité de n. Ainsi $v_{n+1} - v_n$ n'est pas de signe constant et la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ n'est pas monotone.

deg SUITES

Suites Graphique Tableau

Régler l'intervalle

n	u_n
1	2
2	0.5
3	1.333333
4	0.75
5	1.2
6	0.8333333
7	1.142857
8	0.875

2) b) Avec le tableur de la calculatrice, on peut conjecturer que $(v_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers 1

c) Démontrons que (v_n) converge vers 1
Soit a un réel strictement positif.

On raisonne par équivalences :

$v_n \in]1-a ; 1+a[\iff 1-a < 1 - \frac{(-1)^n}{n} < 1+a$

$v_n \in]1-a ; 1+a[\iff -a < \frac{(-1)^n}{n} < a$

On passe à la valeur absolue :

$v_n \in]1-a ; 1+a[\iff \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| < a$

$\iff \frac{1}{n} < a$

$v_n \in]1-a ; 1+a[\iff n > \frac{1}{a}$

Ainsi pour tout réel $a > 0$, il existe un entier n_a immédiatement supérieur à $\frac{1}{a}$, tel que pour tout entier $n \geqslant n_a$:

$$v_n \in]1-a ; 1+a[$$

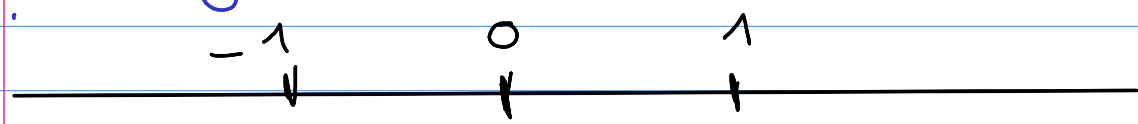
$\boxed{\text{Ainsi la suite } (v_n) \text{ vérifie la définition d'une suite convergeant vers } 1.}$

3) Soit $(w_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie pour tout entier $n \geq 0$ par :

$$w_n = (-1)^n$$

Démontrons par l'absurde que la suite (w_n) ne converge pas vers un réel l.

Hypothèse : on suppose que la suite (w_n) converge vers un réel ℓ.



Par définition il existe un entier $n_{0,5}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_{0,5}$, on a :

$$w_n \in \,]\ell-0,5;\ell+0,5[$$

En particulier on doit avoir : $w_{n_{0,5}}$ et $w_{n_{0,5}+1}$ dans l'intervalle $]\ell-0,5;\ell+0,5[$.

Or $|w_{n_{0,5}} - w_{n_{0,5}+1}| = 2$ car deux termes consécutifs de la suite ont pour valeurs -1 et 1.

On aboutit à une contradiction : la distance entre $w_{n_{0,5}}$ et $w_{n_{0,5}+1}$ est de 2 et ils doivent appartenir à $]\ell-0,5;\ell+0,5[$ d'amplitude 1.

Par conséquent l'hypothèse de départ est fausse et on peut affirmer que la suite (w_n) ne converge pas vers 1.

Capacité 4 ***Modélisation par une suite et algorithme de seuil***

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

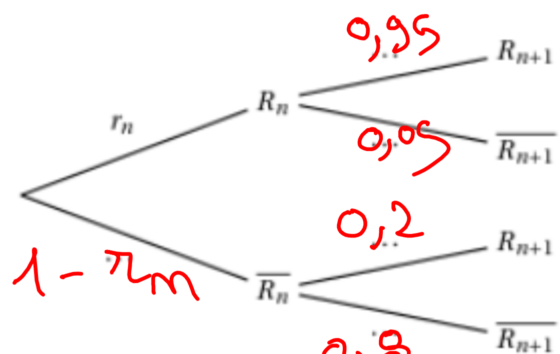
- à la fin de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,6;

- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95 ;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n-ième semaine. On a alors $r_n = \mathbb{P}(R_n)$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



2) Pour tout entier $n \geq 0$;

R_n et $\overline{R_n}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(R_{n+1}) = P(R_{n+1} \cap \overline{R_n}) + P(R_{n+1} \cap R_n)$$

On applique deux fois la formule des probabilités composées.

$P(R_{n+1}) = P(\overline{R_n}) \times P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) + P(R_n) \times P_{R_n}(R_{n+1})$

$P(R_{n+1}) = (1-r_n) \times 0,2 + r_n \times 0,95$

donc $P(R_{n+1}) = 0,2 + 0,75 r_n$

donc $\boxed{r_{n+1} = 0,2 + 0,75 r_n}$

3) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on définit la propriété :

$\mathcal{P}_n$: " $r_n < 0,8$ "

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vrai pour tout entier $n \geqslant 1$:

Initialisation On a $r_1 = P(R_1) = 0,6$

donc $r_1 < 0,8$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie

Hérédité

<u>Hypothèse de récurrence</u> : Soit un entier $n \geqslant 1$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

L'hypothèse de récurrence se traduit par :

$r_n < 0,8$

On applique la relation de récurrence :

$0,75 r_n + 0,2 < 0,75 \times 0,8 + 0,2$

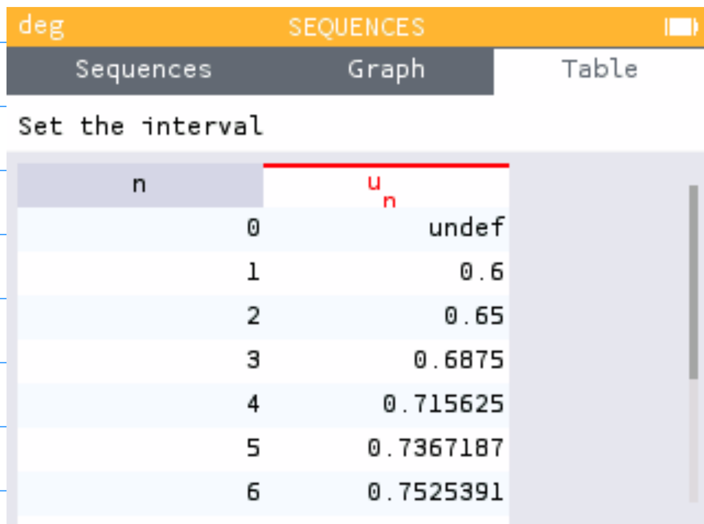
donc $r_{n+1} < 0,8$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

donc la propriété est héréditaire.

$\boxed{\text{Conclusion}}$ $\mathcal{P}_n$ est initialisée pour $n=1$ et elle est héréditaire donc elle est vraie par récurrence pour tout entier $n \geq 1$.

3)



n	u_n
0	undef
1	0.6
2	0.65
3	0.6875
4	0.715625
5	0.7367187
6	0.7525391
7	[illegible]

On peut conjecturer que la suite (r_n) converge vers $0,8$.

5) On admet que (r_n) converge vers une limite ℓ.

Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$r_{n+1} = 0,75\, r_n + 0,2$$

D'après une propriété du cours,

si $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} r_{n+1} = \ell$

Par règles opératoires de produit et de somme on a : donc en passant à la limite dans $r_{n+1} = 0{,}75 r_n + 0{,}2$:

$$\ell = 0{,}75 \times \ell + 0{,}2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}25\ell = 0{,}2$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\ell = 0{,}8}$$

La suite (r_n) converge donc vers $0{,}8$.

6. Justifier qu'il existe un entier n tel que $u_n > 0,79$ et compléter la fonction Python ci-dessous pour que seuil(0.79) retourne le plus petit entier n tel que $r_n > 0,79$. Il s'agit d'un **algorithme de seuil**.

```
def seuil(s):
    r = 0.9
    n = 1
    while r <= s:
        r = 0.75*r+0.2
        n = n + 1
    return n
```

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0{,}8$ alors par définition il existe un entier N tel que pour tout entier $n \geqslant N$, on a : $u_n \in]0{,}79 ; 0{,}81[$

Pour tout entier $n \geqslant N$, on a donc :

$$0{,}79 < u_n .$$

7. Modifier la fonction `seuil(s)` en une fonction `seuil2(s)` qui retourne le plus grand entier n tel que $u_n < s$. Pour quelles valeurs de `s`, l'exécution de `seuil2(s)` ne se terminera-t-elle pas ?

```
def seuil2(s):
    r = 0.9
    n = 1
    while r < s:
        r = 0.75*r + 0.2
        n = n + 1
    return n - 1
```

L'exécution de seuil2(s) ne se terminera pour toute valeur $s \geqslant 0.8$.

Capacité 6 ***Passer à limite dans une inégalité***

On définit les suites (u_n) et (v_n) pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k}$ et $v_n = 1 + e^{-n}$. ← erreur

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer u_n sous une forme plus simple.
2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, comparer u_n et v_n.
3. On admet que $\lim_{n\to+\infty} 0,1^n = 0$. Qu'obtient-on lorsqu'on passe à limite dans l'inégalité établie à la question précédente?

1) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k}} = 9 \times \frac{1}{10} \times \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \times \frac{10}{9} \times \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = 1 - \frac{1}{10^n}$$

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$

2) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$u_n = 1 - \frac{1}{10^n}$ donc $u_n < 1$

et $v_n = 1 + e^{-n}$ donc $v_n > 1$

Ainsi on a : $u_n < 1 < v_n$

3) Si on admet que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{10^n} = 0$ alors par somme, on a :

$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{10^n} = 1$ c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

De même, on a $e^{-n} = \frac{1}{e^n}$

$\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$ donc par quotient $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n} = 0^+$

Par somme on a donc $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{e^n} = 1$

c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$

En passant à la limite dans l'inégalité vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n < 1 < v_n$, on obtient donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq 1 \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$

$$\iff \quad 1 \leq 1 \leq 1$$

Capacité 7 ***Justifier qu'une suite diverge avec un théorème de limite par comparaison***

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - (1+x)$.
   a. Déterminer le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire que pour tout réel x, on a $1 + x \leqslant e^x$.
   c. En déduire que la suite $(e^n)_{n\geqslant 0}$ a pour limite $+\infty$.
   d. En déduire que la suite $(e^{-n})_{n\geqslant 0}$ a pour limite 0^+.
2. Soit la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3n + n\cos n$.

   Démontrer que (u_n) est divergente de limite $+\infty$.
3. Soit la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sin n - 3n^2$.
   Étudier la limite de la suite (v_n).
4. Soit la suite (w_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{n^2 + (-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$.
   Étudier la limite de la suite (w_n).

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - (1+x)$

a) f dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = e^x - 1$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

b) f admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel x, on a donc $f(x) \geqslant 0$

et donc $e^x \geqslant 1 + x$

c) On en déduit que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$e^n \geqslant 1 + n$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + n = +\infty$

donc par comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$

d) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $e^{-n} = \dfrac{1}{e^n}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$ donc par quotient on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{e^n} = 0^+$

c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0^+$

2) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n + n\cos n$

Pour tout entier naturel n, on a :

$$\cos(n) \geq -1$$

donc $n\cos(n) \geq -n$

donc $3n + n\cos(n) \geq 3n - n$

donc $3n + n\cos(n) \geq 2n$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n = +\infty$

donc par comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n + n \times \cos(n) = +\infty$

3) Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \sin(n) - 3n^2$

Pour tout entier naturel n, on a :

$$\sin(n) \leq 1$$

donc $\sin(n) - 3n^2 \leq 1 - 3n^2$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - 3n^2 = -\infty$

donc par comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin(n) - 3n^2 = -\infty$

4) Soit (w_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$$

Pour tout entier naturel n :

$$\frac{n^2 - 1}{n+1} \leq \frac{n^2 + (-1)^n}{n+1} \leq w_n \leq \frac{n^2 + (-1)^n}{n-1} \leq \frac{n^2+1}{n-1}$$

Or $\dfrac{n^2-1}{n+1} = \dfrac{n^2 \times (1-\frac{1}{n^2})}{n \times (1+\frac{1}{n})} = n \times \dfrac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}$

Par quotient, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = 1$

donc par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} n \times \dfrac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = +\infty$

Capacité 8 ***Déterminer une limite avec le théorème de limite par encadrement***

En utilisant le théorème de limite par encadrement, étudier la convergence des suites (u_n), et (v_n) définies pour tout entier $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = e^{-2n} \cos(n) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n + n^2}{2n^2}$$

1) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

or $e^{-2n} > 0$

donc $-e^{-2n} \leq e^{-2n} \cos(n) \leq e^{-2n}$

donc $-(e^{-n})^2 \leq e^{-2n} \cos(n) \leq (e^{-n})^2$

Or on a prouvé précédemment que $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$

donc par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} (e^{-n})^2 = 0$

D'après le théorème de limite par encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} e^{-2n} \times \cos(n) = 0$$

2) Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\frac{-1+n^2}{2n^2} \leq \frac{(-1)^n + n^2}{2n^2} \leq \frac{1+n^2}{2n^2}$$

donc $\dfrac{-1}{2n^2} + \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{(-1)^n + n^2}{2n^2} \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n^2}$

Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n^2} = 0$ par quotient.

donc par somme $\begin{cases} \lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \text{et } \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

On peut alors appliquer le théorème de limite par encadrement pour conclure que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n + n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

Capacité 10 ***Modéliser à l'aide d'une suite***

On s'intéresse à une population de phoques vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.
Au début de l'an 2000, on comptait 500 phoques. Une étude a permis de modéliser ce nombre de phoques par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = 0,85u_n(1-u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de phoques, en milliers, au début de l'année $2000+n$.
Dans les calculs, on arrondira les nombres de phoques à l'unité.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de phoques au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.
2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n et $1-u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0;1]$.
   - **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,85u_n$.
   - **b.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,5 \times 0,85^n$.
   - **c.** Déterminer la limite de la suite (u_n).
   - **d.** Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de phoques?

1) D'après ce modèle, on avait :

- en 2001, $u_1 = 0,85u_0(1-u_0) = 0,85 \times 0,5^2$
  $u_1 = 0,85 \times 0,25 = 0,2125$ centaines de phoques
- en 2002, $u_2 = 0.85 \times 0,2125 \times (1-0,2125)$
  $u_2 \simeq 0,1422$ centaines de phoques

2) a) On admet que pour tout entier naturel n on a u_n et $1-u_n$ dans l'intervalle $[0;1]$.
Pour tout entier $n \geq 0$, on a :
$0 \leq u_n \leq 1$ donc $0 \leq 1-u_n \leq 1$

On part de l'inégalité :
$0 \leq 1-u_n \leq 1$

On peut multiplier chaque membre par $0{,}85u_n \geq 0$ sans changer les sens des inégalités :

$$0 \leq 0{,}85u_n(1-u_n) \leq 0{,}85u_n$$

On en déduit que pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$\boxed{0 \leq u_{n+1} \leq 0{,}85u_n}$$

b) Pour tout entier naturel n on définit la propriété :

P_n : " $0 \leq u_n \leq 0{,}5 \times 0{,}85^n$ "

Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout entier $n \geq 0$:

Initialisation : On a $u_0 = 0{,}5$ et $0{,}5 \times 0{,}85^0 = 0{,}5$
donc $0 \leq u_0 \leq 0{,}5 \times 0{,}85^0$
donc P_0 est vraie

Hérédité : Soit un entier $n \geq 0$ tel que P_n est vraie.
Cette hypothèse de récurrence se traduit par :

$$0 \leq u_n \leq 0{,}5 \times 0{,}85^n$$

On a donc : $0 \leq 0{,}85u_n \leq 0{,}5 \times 0{,}85^{n+1}$

On a démontré que $0 \leq u_{n+1} \leq 0{,}85u_n$

On en déduit que :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 0{,}85\, u_n \leq 0{,}5 \times 0{,}85^{n+1}$$

La propriété P_{n+1} est donc vraie et la propriété est héréditaire

Conclusion : La propriété est initialisée et elle est héréditaire, donc elle est vraie par récurrence pour tout entier $n \geq 0$.

c) On a démontré que pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$0 \leq u_n \leq 0{,}5 \times 0{,}85^n$$

De plus $|0{,}85| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5 \times 0{,}85^n = 0$

Donc par encadrement, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 .$$

d) On peut conclure que la pérennité de cette population de phoques est menacée.

Capacité 11 ***Justifier l'existence d'une limite par convergence monotone***

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

1. Étudier le sens de variation de (u_n).
2. Démontrer que (u_n) est bornée et converge.

1) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2(n+1)} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$$

Les termes soulignés en vert se simplifient :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n}$$

Or on a $\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n}$

et $\frac{1}{2n+2} < \frac{1}{2n}$

donc $\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$

donc $\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} < \frac{1}{n}$

Ainsi on a $\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} < 0$

et donc $u_{n+1} - u_n < 0$

On en déduit que la suite (u_n) est décroissante.

2) Pour tout entier $n \geq 0$, u_n est une somme de nombres positifs
donc $u_n > 0$.

D'après les questions précédentes :

- (u_n) est décroissante
- (u_n) est minorée par 0

Donc d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge.

On pourra démontrer plus tard que (u_n) converge vers 0.