Corrigé des exemples du cours
Chapitre 1 : suites et récurrence

Capacité 1 ***Modéliser une situation par une suite***

Une balle en caoutchouc est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur de 2 mètres au-dessus du sol. Le choc n'étant pas parfaitement élastique, la balle rebondit jusqu'à une hauteur de 1,60 mètre et continue à rebondir, en atteignant après chaque rebond une hauteur égale au $\frac{4}{5}$ de la hauteur du rebond précédent.

On modélise les hauteurs atteintes par la balle par une suite (h_n) où pour tout entier naturel n, h_n est la hauteur, exprimée en mètres, atteinte par la balle au n-ième rebond. On a alors $h_0 = 2$.

1. **a.** Calculer h_1 et h_2.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer h_{n+1} en fonction de h_n.
   c. En déduire la nature de la suite (h_n). Préciser ses caractéristiques.
   d. Déterminer le sens de variation de la suite (h_n).
2. Déterminer le nombre minimal N de rebonds à partir duquel la hauteur atteinte par la balle est inférieure à 20 cm. Expliquer la démarche employée.

1) a) $h_0 = 2 \xrightarrow{\times \frac{4}{5}} h_1 = 1{,}6 \xrightarrow{\times \frac{4}{5}} h_2 = 1{,}28$

b) et c) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$h_{n+1} = \frac{4}{5} \times h_n$$

Par définition, la suite (h_n) est géométrique de raison $\frac{4}{5}$.

d) La suite (h_n) est géométrique de raison $\frac{4}{5} > 0$ donc elle est monotone.
De plus $h_0 > h_1$, donc (h_n) est décroissante.

2) Pour déterminer le plus petit entier N tel que $h_N < 0,2$ on utilise :

- soit le tableau de valeurs de la calculatrice et en trouve que $N = 11$

deg SEQUENCES

Sequences | Graph | Table

Set the interval

5	0.65536
6	0.524288
7	0.4194304
8	0.3355443
9	0.2684355
10	0.2147484
11	0.1717987
12	0.137439
13	0.1099512

- soit un algorithme de seuil programmé en Python :

https://workshop.numworks.com/python/frederic-junier/chapitre1_capacite1

```
deg                PYTHON
>>> from chapitrel_capacitel -
ll
>>> |
```

algorithme de seuil

```python
# Type your text here
def seuil(s):
  h = 2
  n = 0
  while h >= s:
    h = 0.8 * h
    n = n + 1
  return n

print(seuil(0.2))
```

Capacité 2 ***Manipuler des encadrements***

Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+e^{-n}} < 1$$

On manipule des encadrements :

Pour tout entier $n \geq 0$:

$0 < e^{-n} \leq 1$

donc $1 < 1+e^{-x} \leq 2$

donc $\boxed{\frac{1}{1} > \frac{1}{1+e^{-x}} \geq \frac{1}{2}}$

Une autre méthode est d'appliquer deux fois l'étude du signe de la différence.

D'une part : $1 - \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1+e^{-x}-1}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

Or $e^{-x} > 0$ donc $1 - \frac{1}{1+e^{-x}} > 0$

donc $\frac{1}{1+e^{-x}} < 1$

D'autre part : $\frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{2} = \frac{2-1-e^{-x}}{2(1+e^{-x})}$

$$= \frac{1-e^{-x}}{2(1+e^{-x})}$$

Or $x \geq 0$ donc $e^{-x} \leq 1$

et donc $\frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{2} \geq 0$

et donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+e^{-n}}$

Capacité 3 ***Utiliser la méthode du signe de la différence***

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_0 = 99$ et $u_{n+1} = u_n - n^2 + 2n + 8$.
   Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ et en déduire l'étude des variations de la suite (u_n).
2. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sqrt{n}$.
   a. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.
   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
   b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, on a $0 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{1}{2}$.

1) Pour tout entier $n \geq 0$:

$u_{n+1} - u_n = -n^2 + 2n + 8$

On étudie le signe du trinôme $-n^2+2n+8$

D'abord on détermine ses racines :

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times 8 = 36$

$\Delta > 0$ donc 2 racines distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-6}{-2} = 4$ et $x_2 x_1 = \frac{c}{a}$

donc $x_2 = \frac{-8}{x_1} = -2$

Ensuite on applique la règle du signe d'un binôme :

n	0		4		$+\infty$
$-n^2+2n+8$ $= u_{n+1}-u_n$		$+$ signe de $-a$	0	$-$ signe de a	

On en déduit que :

- pour tout $n \in [\![0 ; 4]\!]$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc (u_n) croissante entre les rangs 0 et 4
- sinon pour tout $n \geq 4$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, donc (u_n) décroissante à partir du rang 4

2) Pour tout entier $n \geq 0$, on pose :

$$u_n = \sqrt{n}$$

a) On a donc :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \times (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{}$$

On a multiplié numérateur et dénominateur par $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

par l'expression conjuguée du numérateur car on veut "chasser" les racines du numérateur.

On a donc en développant le numérateur à l'aide de l'identité remarquable :

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}}$$

Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$\sqrt{n} \geq 0$ et $\sqrt{n+1} > 0$

donc $\dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > 0$

et donc $u_{n+1} - u_n > 0$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

b) Pour tout entier $n \geq 4$, on a :

$$\sqrt{n} \geq \sqrt{4}$$

et $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{4+1}$

par croissance de la fonction $\sqrt{}$ sur $[0;+\infty[$.

On en déduit que :

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \geq 2+\sqrt{5}$$

puis que $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \leq \dfrac{1}{2+\sqrt{5}} < \dfrac{1}{2}$

Ainsi pour tout entier $n \geq 4$, on a :

$$\boxed{0 \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}}$$

Capacité 4 ***Comparer avec les fonctions de référence***

1. Soit q un réel tel que $1 < q$. Comparer $1-\frac{1}{q}$, $\left(1-\frac{1}{q}\right)^2$ et $\left(1-\frac{1}{q}\right)^3$.

2. Soit un entier $n \geqslant 1$, comparer $e^{-(1+\frac{1}{n})}$ et $e^{-\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$.

1) Soit q un réel tel que $1 < q$.

On a donc : $1 > \frac{1}{q}$

puis $1 - \frac{1}{q} > 0$

De plus $-\frac{1}{q} < 0$ donc $1 - \frac{1}{q} < 1$.

Ainsi on a : $0 < 1 - \frac{1}{q} < 1$

On applique l'échelle de comparaison des puissances :

$$0 < \left(1-\frac{1}{q}\right)^3 \leq \left(1-\frac{1}{q}\right)^2 < 1-\frac{1}{q} < 1$$

2) Soit un entier $n \geq 1$:

On a donc : $\frac{1}{n} > 0$

et donc $1 + \frac{1}{n} > 1$

D'après l'échelle de comparaison des

puissances :

$$1 \leq \sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq 1+\frac{1}{n}$$

et donc $-\sqrt{1+\frac{1}{n}} \geq -\left(1+\frac{1}{n}\right)$

puis par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{e^{-\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \geq e^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}}$$

Capacité 5 ***Comparer membre à membre***

1. Démontrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k+1)}$.

2. Justifier que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

3. À l'aide d'un argument de *somme télescopique*, en déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

4. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} < 1$.

1) Pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$k \leq k+1$$

de plus $k+1 > 0$

donc $k(k+1) \leq (k+1)^2$

$$\boxed{\text{et donc } \frac{1}{k(k+1)} \geq \frac{1}{(k+1)^2}}$$

2) Pour tout entier $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1+k-k}{k(k+1)} = \frac{1+k}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)}$$

$$\boxed{\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}$$

3) Pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $1 \leq k \leq n$:

$k = 1$ $\quad \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{1+1}}$

$k = 2$ $\quad \frac{1}{2(2+1)} = \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2+1}}$

$\vdots$

$\quad \frac{1}{k(k+1)} = \cancel{\frac{1}{k}} - \cancel{\frac{1}{k+1}}$

$k = n-1$ $\quad \frac{1}{(n-1)n} = \cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}}$

$k = n$ $\quad \frac{1}{n(n+1)} = \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$

Si on ajoute membre à membre ces n égalités, on obtient des simplifications en cascade dans le membre de droite :

Il reste :

$$\underbrace{\frac{1}{1(1+1)}+\frac{1}{2(2+1)}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}}_{\text{somme des membres de gauche}} = \underbrace{1-\frac{1}{n+1}}$$

somme des membres de droite (simplification télescopique)

On peut conclure avec le symbole de sommation $\sum$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1-\frac{1}{n+1}}$$

4) Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{n+1} > 0$$

donc $\boxed{1 - \frac{1}{n+1} < 1}$

De plus si on applique l'inégalité démontrée en 1) à tout entier k entre 1 et n, on obtient :

$k=1$ $$\frac{1}{1(1+1)} \geq \frac{1}{(1+1)^2}$$

$k=2$ $$\frac{1}{2(2+1)} \geq \frac{1}{(2+1)^2}$$

$\vdots$

k $$\frac{1}{k(k+1)} \geq \frac{1}{(k+1)^2}$$

$\vdots$

$k=n$ $$\frac{1}{n(n+1)} \geq \frac{1}{(n+1)^2}$$

En ajoutant membre à membre ces inégalités de même sens, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}}$$

D'une part on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \leq 1 - \frac{1}{n+1}$$

D'autre part on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

Par transitivité de l'inégalité, on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \leq 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

De plus une somme de nombres positifs est positive, donc :

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} < 1$$

Capacité 6 ***Choisir une méthode adaptée pour étudier le sens de variation d'une suite***

1. $\boxed{\textbf{Méthode 1}}$: *Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$*

   a. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n(1-2u_n)$.
   - ☞ Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   - ☞ Conclure sur le sens de variation de la suite (u_n).

   b. Reprendre le même plan d'étude pour étudier le sens de variation de la suite (w_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

2. $\boxed{\textbf{Méthode 2}}$: *Si (u_n) à termes strictement positifs, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1*

   Soit la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-n}$. On admet que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n > 0$.
   - ☞ Soit un entier $n \geqslant 0$, démontrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.
   - ☞ En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3. $\boxed{\textbf{Méthode 3}}$: *Si $u_n = f(n)$, étudier les variations de f sur $[0\,; +\infty[$*

   Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$, par $u_n = \frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n + 1}$.

   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$. On a pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = f(n)$.
   - ☞ Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $f'(x)$.
     ATTENTION, on peut dériver la fonction f mais pas la suite (u_n) car celle-ci n'est pas définie sur un intervalle!!!
   - ☞ En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$ et le sens de variation de (u_n).

1) <u>Méthode 1 :</u>

a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$u_{n+1} - u_n = u_n(1-2u_n) - u_n = -2u_n^2$

On a $u_n^2 \geqslant 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc décroissante.}}$

b) Pour tout entier $n \geq 1$; on a :

$$w_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

donc $w_{n+1} - w_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$

donc $w_{n+1} - w_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n+1}$

donc $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n+1}$

Pour tout entier $n \geq 1$ on a donc

$$w_{n+1} - w_n > 0$$

La suite (w_n) est donc strictement croissante, ce qui est logique puisqu'on ajoute à chaque rang un nouveau terme positif.

2) Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-n} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-n}$$

Or $n \geq 0$ donc $0 < e^{-n} \leq 1$

et donc $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

De plus : $u_n > 0$ (admis se prouve par récurrence)

donc $0 \times u_n < u_{n+1} < u_n$

donc $0 < u_{n+1} < u_n$

la suite (u_n) est donc décroissante

3) Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{e^n}{e^n + 1} = f(n)$$

avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

$f = \frac{u}{v}$ avec u et v dérivables sur $\mathbb{R}$

donc f dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel x :

$u(x) = e^x$ $\qquad v(x) = e^x + 1$

$u'(x) = e^x$ $\qquad v'(x) = e^x$

D'après une formule du cours :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

donc : $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x \times e^x}{(e^x+1)^2}$

donc $f'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

Pour tout réel x, on $e^x > 0$ et $(e^x+1)^2 > 0$

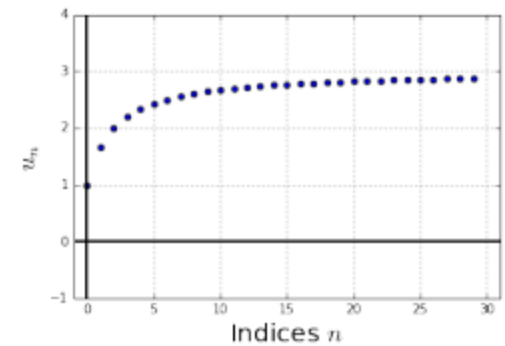
donc $f'(x) > 0$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par $u_n = f(n)$ est donc croissante car l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{R}$.

Capacité 7 ***Démontrer qu'une suite est bornée***

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_n = \dfrac{3n+2}{n+2}$.



1. On donne ci-contre la représentation graphique des premiers termes de la suite (u_n) dans un repère orthonormal.

   Émettre une conjecture sur un minorant et un majorant possibles de la suite (u_n).

2. Démontrer cette conjecture.

1) Graphiquement, on peut conjecturer que pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$1 \leq u_n < 3$$

et donc que 1 est minorant et 3 un majorant de la suite (u_n).

2) Démontrons cette conjecture en appliquant deux fois la méthode du signe de la différence :

Pour tout entier $n \geq 0$:

$$3 - u_n = 3 - \frac{3n+2}{n+2} = \frac{3(n+2) - (3n+2)}{n+2}$$

$$3 - u_n = \frac{4}{n+2}$$

On a donc $3 - u_n > 0$

et donc $u_n < 3$

3 est donc un majorant de (u_n)

D'autre part :

$$u_n - 1 = \frac{3n+2}{n+2} - \frac{n+2}{n+2} = \frac{2n}{n+2}$$

On a donc $u_n - 1 \geq 0$

et donc $1 \leq u_n$

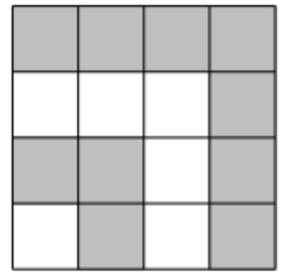
1 est donc un minorant de (u_n)

Remarque : On peut démontrer que (u_n) est croissante et donc minorée par son premier terme u_0.

Capacité 8 ***Étudier une suite arithmétique***

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ des entiers impairs successifs :

$$u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 5, \ldots$$



1. Justifier que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmétique.
2. Soit n un entier naturel positif, exprimer u_n en fonction de n.
3. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} u_k = n^2$.

1) Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = u_n + 2$$

La suite des entiers impairs successifs est donc arithmétique de raison 2.

2) D'après une propriété du cours, pour tout entier naturel n, on a :

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)\times 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1}$$

3) D'après une propriété du cours, pour tout entier naturel n, on a

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \ldots + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$$

donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n} u_k = n \times \frac{1 + 2n - 1}{2} = n^2}$

Capacité 9 *Étudier une suite géométrique*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite arithmétique des entiers impairs définie dans l'exemple 9.
On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ par $v_n = \mathrm{e}^{u_n}$.

1. Justifier que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique.
2. Calculer la somme $\sum_{k=1}^{30} v_k$.
3. Soit un entier $n \geqslant 1$, exprimer en fonction de n le produit de termes consécutifs :

$$\prod_{k=1}^{n} v_k = v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_{n-1} \times v_n$$

1) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{u_n+2} = e^2 \times e^{u_n}$$

donc $\boxed{v_{n+1} = e^2 \times v_n}$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison e^2.

2) D'après une propriété du cours :

$$\sum_{k=1}^{30} v_k = v_1 \times \frac{1-(e^2)^{30}}{1-e^2} = e^1 \times \frac{1-e^{60}}{1-e^2}$$

donc $\boxed{\sum_{k=1}^{30} v_k = e^1 \times \frac{e^{60}-1}{e^2-1}}$

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\prod_{k=1}^{n} v_k = v_1 \times \ldots \times v_n = e^{u_1} \times \ldots \times e^{u_n}$$

$$\prod_{k=1}^{n} v_k = e^{u_1 + \ldots + u_n} = e^{\sum_{k=1}^{n} u_k}$$

Or la suite (u_n) est arithmétique de raison 2 donc d'après une propriété du cours :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = n \times \frac{u_1 + u_n}{2} = n \times \frac{1 + 2n - 1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = n^2$$ (déjà démontré en capacité 8)

On en déduit que :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} v_k = e^{n^2}}$$

Capacité 10 ***Démontrer avec un raisonnement par récurrence***

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 2u_n - 5$.

   a. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 5.

   b. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

   c. Quelle propriété pourrait-on démontrer par récurrence pour répondre aux deux questions précédentes?

   d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 5 - 2^{n+2}$.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = -1$ et pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = \sqrt{3v_n + 4}$.

   a. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{3x+4}$ est croissante sur $[0; +\infty[$.

   b. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.

3. Soit (u_n) une suite réelle telle que pour tout entier $n \geqslant 0$ on ait $u_{n+1} = u_n^3$.

   a. Démontrer que si pour un entier $n \geqslant 0$, on a $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$ alors on a $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

   b. Peut-on en déduire que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$?

1) a) b) => fait en classe

1) c) Pour répondre aux deux questions a) et b), on pourrait démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, la propriété P_n : " $u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 5$ " est vraie

d) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on définit la propriété :

$$P_n : \text{" } u_n = 5 - 2^{n+2} \text{ "}$$

Démontrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$:

Initialisation : $u_0 = 1$ et $5 - 2^{0+2} = 5 - 4 = 1$
donc $u_0 = 5 - 2^{0+2}$ donc P_0 est vraie

Hérédité :

Hypothèse de récurrence : Soit un entier $n \geq 0$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

On a donc $u_n = 5 - 2^{n+2}$

donc $2u_n - 5 = 2 \times (5 - 2^{n+2}) - 5$

donc $2u_n - 5 = 10 - 5 - 2^{n+3}$

donc $2u_n - 5 = 5 - 2^{n+3}$

donc $2u_n - 5 = 5 - 2^{n+1+2}$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire

Conclusion : La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée pour $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie par récurrence pour tout entier $n \geq 0$

2) a) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x+4}$

$f(x)$ est de la forme $u(mx+p)$ avec $m = 3$, $p = 4$ et $u : y \longmapsto \sqrt{y}$

Si $x \in [0;+\infty[$ alors $3x+4 \in [4;+\infty[$ et u dérivable sur $[4;+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation d'une fonction composée $x \longmapsto u(mx+p)$ vue en 1ère, la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout réel $x \in [0;+\infty[$, on a :

$f'(x) = m\,u'(mx+p)$

avec $u'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ $m = 3$ et $p = 4$

donc $f'(x) = 3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{3x+4}}$

Pour tout $x \in [0;+\infty[$, on a :

$$3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x+4}} > 0$$

donc $f'(x) > 0$

donc $\boxed{f \text{ strictement croissante sur } [0;+\infty[}$

b) Soit (v_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} v_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ v_{n+1} = \sqrt{3v_n+4} = f(v_n) \end{cases}$$

Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, la propriété

P_n : "$0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 4$" est vraie

Initialisation $v_0 = -1$ $v_1 = \sqrt{-3+4} = 1$

et $v_2 = \sqrt{3 \times 1 + 4} = \sqrt{7}$

On a $0 \leq 1 \leq \sqrt{7} \leq 4$ donc $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 4$

donc P_1 est vraie

Hérédité Soit un entier $n \geqslant 1$ tel que P_n est vraie

On a donc $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 4$

la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$ donc

$$f(0) \leq f(v_n) \leq f(v_{n+1}) \leq f(4)$$

c'est-à-dire $\sqrt{4} \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq \sqrt{3 \times 4 + 4}$

c'est-à-dire $2 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 4$

Or $0 \leq 2$ donc on a :

$$0 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 4$$

donc P_{n+1} est vraie

et la propriété est héréditaire

$\boxed{\text{Conclusion}}$ La propriété P_n est initialisée pour $n=1$ et elle est héréditaire donc elle est vraie par récurrence pour tout entier $n \geq 1$.

3) => en classe lundi 14/09

Exercice 20 p. 26

20 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$.
Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$: « $u_n \geqslant n$ ».

1. Montrer que $P(0)$ est vraie.

2. a. Soit p un entier naturel tel que $P(p)$ est vraie.
Écrire l'inégalité qu'on obtient.

b. Écrire la propriété $P(p+1)$.

c. Montrer qu'on peut en déduire que $P(p+1)$ est vraie.

3. Que peut-on en conclure ?

1) $P(0)$: " $u_0 \geq 0$ "
Or $u_0 = 1$ donc $u_0 \geq 0$ donc $P(0)$ vraie

2) a) Soit p un entier naturel tel que $P(p)$ est vraie

$P(p)$ s'écrit : " $u_p \geq p$ "

b) $P(p+1)$ s'écrit " $u_{p+1} \geq p+1$ "

c) On a fait l'hypothèse de récurrence que $P(p)$ est vraie c'est-à-dire que :

$u_p \geq p$

Par relation de récurrence, on a :

$$u_{p+1} = 2u_p - p + 1$$

De $u_p \geqslant p$ on peut alors déduire que :

$$2u_p - p + 1 \geqslant 2p - p + 1$$

c'est-à-dire $2u_p - p + 1 \geqslant p + 1$

c'est-à-dire $u_{p+1} \geqslant p + 1$

On a démontré l'hérédité de la propriété P : si $P(p)$ est vraie pour un entier naturel p alors $P(p+1)$ est vraie.

3) En 1) on a démontré l'initialisation de la propriété $P(n)$ pour $n = 0$.
En 2) c) on a démontré l'hérédité de la propriété $P(n)$.
Par application de l'axiome de récurrence, on en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

Exercice 39 p. 28

39 Capacité 1, p. 13

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - 5$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n = 2^n + 5$.

Pour tout entier naturel n, on définit la propriété :

$$P(n) = " u_n = 2^n + 5 "$$

Démontrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$.

Initialisation

$u_0 = 6$ et $2^0 + 5 = 1 + 5 = 6$

donc $u_0 = 2^0 + 5$

donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité

Hypothèse de récurrence : Soit un entier $p \geq 0$ tel que $P(p)$ est vraie.

L'hypothèse de récurrence se traduit par $u_p = 2^p + 5$

On applique la relation de récurrence :

$$u_{p+1} = 2u_p - 5$$

On substitue l'hypothèse de récurrence

$$u_{p+1} = 2(2^p + 5) - 5 = 2^{p+1} + 5$$

On en déduit que $P(p+1)$ est vraie.
On a démontré que la propriété est héré-
-ditaire.

$\boxed{\text{Conclusion}}$ La propriété $P(n)$ est initialisée
pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc elle est
vraie par récurrence pour tout entier $n \geqslant 0$.

42 Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = 2$ et pour tout entier naturel n non nul : $v_{n+1} = \frac{3}{5}v_n + 2$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul, $v_n \leqslant 5$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la propriété :

$P(n) =$ " $v_n \leq 5$ "

Initialisation

On a $v_1 = 2$ et $2 \leq 5$

donc $P(1)$ est vraie

Hérédité

Hypothèse de récurrence : Soit un entier $p \geq 1$ tel que $P(p)$ est vraie

L'hypothèse de récurrence se traduit par $v_p \leq 5$.

On applique la relation de récurrence au premier membre pour retrouver v_{p+1} :

$v_p \leq 5$

donc $\frac{3}{5}v_p + 2 \leq \frac{3}{5} \times 5 + 2$

donc $\frac{3}{5}v_p + 2 \leq 5$

donc $v_{p+1} \leq 5$

Conclusion La propriété P(n) est initialisée pour n = 1 et elle est héréditaire ; donc elle est vraie par récurrence pour tout entier n ≥ 1.

Exercice sujet A p. 44

Sujet A 60 min RAISONNER CALCULER

Thème • Raisonnement par récurrence

CAPACITÉ MISE EN ŒUVRE
Questions 1. et 3. b. ▶ Capacité 1 p. 13

Soit a un nombre réel fixé non nul.
Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$.
On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire :

$$u_{n+1} = e^{u_n}\left(e^{u_n} - 1\right).$$

1. Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant 0.$$

2. Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = e^{2x} - e^x - x.$$

a. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x :

$$g'(x) = \left(e^x - 1\right)\left(2e^x + 1\right).$$

b. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

c. En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
La suite (u_n) étant croissante d'après la question précédente, on peut affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n \geqslant g(a).$$

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

1) On suppose que $a \leq 0$
Pour tout entier naturel n, on définit la propriété : P_n : " $u_n \leq 0$ "

Démontrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier $n \geq 0$;

<u>Initialisation :</u> $u_0 = a$ et $a \leq 0$ donc P_0 est vraie

<u>Hérédité :</u> Soit un entier $n \geq 0$ tel que P_n est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a :
$u_n \leq 0$
par croissance de la fonction exponentielle, on a :
$e^{u_n} \leq 1$
donc $e^{u_n} - 1 \leq 0$
de plus $e^{u_n} \geq 0$
donc $e^{u_n} \times (e^{u_n} - 1) \leq 0$
Ainsi on a $u_{n+1} \leq 0$
donc P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire
<u>Conclusion :</u> la propriété P_n est initialisée pour $n=0$ et elle est héréditaire donc elle est vraie par récurrence pour tout entier $n \geq 0$.

2) Soit g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = e^{2x} - e^{x} - x$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$

D'une part pour tout réel x, on a

$$g'(x) = 2e^{2x} - e^{x} - 1$$

D'autre part $(e^{x}-1)(2e^{x}+1) = 2e^{2x} - 2e^{x} + e^{x} - 1$

$$(e^{x}-1)(2e^{x}+1) = 2e^{2x} - e^{x} - 1$$

On en déduit que pour tout réel x :

$$\boxed{g'(x) = (e^{x}-1)(2e^{x}+1)}$$

b) Pour tout réel x, on a $2e^{x}+1 > 0$

donc $g'(x)$ du signe de $e^{x}-1 > 0$

On $e^{x}-1=0 \iff e^{x}=e^{0} \iff x=0$

$e^{x}-1>0 \iff e^{x}>e^{0} \iff x>0$

On en déduit que :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(0)=0$	$\nearrow$	

D'après le tableau de variations de g, pour tout réel x on a : $g(x) \geq 0$

c) Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n = g(u_n)$$

D'après 2) b) on en déduit que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$

La suite (u_n) est donc croissante.

3) On suppose désormais que $a > 0$

La suite (u_n) est croissante d'après la question précédente.
On en déduit qu'elle est minorée par son premier terme $u_0 = a$.
Pour tout entier naturel n, on a donc :

$$u_n \geqslant a.$$

a) Pour tout entier naturel n, on a

$$u_{n+1} - u_n = g(u_n)$$

de plus $u_n \geqslant a > 0$

et la fonction g est croissante sur $[0 ; +\infty[$

donc $g(u_n) \geqslant g(a)$

Ainsi pour tout entier naturel n, on a : $\boxed{u_{n+1} - u_n \geq g(a)}$

b) Pour tout entier naturel n, on définit la propriété :

$$P_n : \text{" } u_n \geq a + n \times g(a) \text{ "}$$

Démontrons que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n, par récurrence.

Initialisation $u_0 = a$ donc $u_0 \geq a + 0 \times g(a)$

donc P_0 est vraie

Hérédité Soit un entier naturel n tel que P_n est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$u_n \geq a + n \times g(a)$$

or $u_{n+1} \geq u_n + g(a)$ d'après 3)a)

donc $u_{n+1} \geq u_n + g(a) \geq a + (n+1) \times g(a)$

donc $u_{n+1} \geqslant a + (n+1) \times g(a)$
donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée pour $n = 0$ et elle est héréditaire, donc elle est vraie par récurrence pour tout entier $n \geqslant 0$,

Exercice 115 p. 36 (Parcours 1)

115 Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 5u_n - 4$.
Démontrer que $u_n = 2 \times 5^n + 1$ pour tout entier naturel n.

Pour tout entier naturel n on définit la propriété :

$$\mathcal{P}_n : \text{" } 2 \times 5^n + 1 = u_n \text{ "}$$

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 0$.

Initialisation : $u_0 = 3$ et $2 \times 5^0 + 1 = 3$

On a donc $u_0 = 2 \times 5^0 + 3$
et donc $\mathcal{P}_0$ est vraie

Hérédité : Soit un entier $n \geq 0$ tel que P_n est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a

$$u_n = 2 \times 5^n + 1$$

Appliquons la formule de récurrence :

$$5u_n - 4 = 5(2 \times 5^n + 1) - 4$$

$$5u_n - 4 = 2 \times 5^{n+1} + 1$$

donc $u_{n+1} = 2 \times 5^{n+1} + 1$

donc P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété P_n est initialisée pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc par récurrence P_n est vraie pour tout entier $n \geq 0$.