Histoire 1

C'est dans son traité sur le *triangle arithmétique*, publié à titre posthume, que Blaise Pascal (1588 - 1651) énonce pour la première fois, dans le cadre de l'arithmétique,le **principe du raisonnement par récurrence** ou **principe d'induction**. Giuseppe Peano(1858-1932), mathématicien italien dont les travaux les plus connus ont porté sur les fondements de la logique et la théorie des ensembles, prend comme axiome le **principe d'induction** pour construire l'ensemble des entiers naturels :« *Si un ensemble E de nombres contient 0 et le successeur de tout nombre de E, alors tout nombre est dans E* ».

1 Suite numérique

Définition 1

Une suite est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
Si u est le nom de la suite, l'image de n par u se note $u(n)$ (notation fonctionnelle) ou de manière plus usuelle u_n (notation indicielle).
L'ensemble des termes de la suite se note alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Capacité 1 ***Modéliser une situation par une suite***

Une balle en caoutchouc est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur de 2 mètres au-dessus du sol.
Le choc n'étant pas parfaitement élastique, la balle rebondit jusqu'à une hauteur de 1,60 mètre et continue à rebondir, en atteignant après chaque rebond une hauteur égale au $\dfrac{4}{5}$ de la hauteur du rebond précédent.
On modélise les hauteurs atteintes par la balle par une suite (h_n) où pour tout entier naturel n, h_n est la hauteur, exprimée en mètres, atteinte par la balle au n-ième rebond. On a alors $h_0 = 2$.

1. **a.** Calculer h_1 et h_2.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer h_{n+1} en fonction de h_n.
   c. En déduire la nature de la suite (h_n). Préciser ses caractéristiques.
   d. Déterminer le sens de variation de la suite (h_n).
2. Déterminer le nombre minimal N de rebonds à partir duquel la hauteur atteinte par la balle est inférieure à 20 cm. Expliquer la démarche employée.

2 Suites et ordre

2.1 Ordre et opérations

Propriété 1

Soit x, y et z des réels.

- Pour tous réels x,y et z, si $x \leqslant y$ alors $x+z \leqslant y+z$.
- Pour tous réels x,y et z, si $x \leqslant y$ et $z>0$ alors $xz \leqslant yz$, et si $x<y$ et $z>0$ alors $xz<yz$
- Pour tous réels x,y et z, si $x \leqslant y$ et $z<0$ alors $xz \geqslant yz$ et si $x<y$ et $z<0$ alors $xz>yz$
- Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$.

Capacité 2 ***Manipuler des encadrements***

Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-n}} < 1$$

2.2 Méthode de la différence

Propriété 2

Comparer deux nombres x et y revient à étudier le signe de leur différence.

- $x>y \Longleftrightarrow x-y>0$
- $x \leqslant y \Longleftrightarrow x-y \leqslant 0$

Capacité 3 ***Utiliser la méthode du signe de la différence***

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_0=99$ et $u_{n+1}=u_n-n^2+2n+8$.
Étudier le signe de $u_{n+1}-u_n$ et en déduire l'étude des variations de la suite (u_n).

2. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=\sqrt{n}$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, on a $0 \leqslant u_{n+1}-u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2.3 Ordre et fonctions de référence

Propriété 3

1. Fonction carré $x \mapsto x^2$

   Si $0 \leqslant a < b$ alors $0 \leqslant a^2 < b^2$ et si $a < b \leqslant 0$ alors $a^2 > b^2 \geqslant 0$

2. Fonction racine carré $x \mapsto \sqrt{x}$

   Si $0 \leqslant a < b$ alors $0 \leqslant \sqrt{a} < \sqrt{b}$ ou *deux nombres positifs (les racines) sont rangés dans le même ordre que leurs carrés*

3. Fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

   Si $0 < a < b$ alors $0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$ et si $a < b < 0$ alors $0 > \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

4. Fonction exponentielle $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

   $a < b \Leftrightarrow \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$ et $a < b \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-a} > \mathrm{e}^{-b}$

5. *Échelle des puissances.*

   - Pour tout réel x tel que $0 < x < 1$ on a $0 < x^3 < x^2 < x < \sqrt{x} < 1$.
   - Pour tout réel x tel que $1 < x$ on a $1 < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3$.
   - Pour tout entier $n \geqslant 1$:
     - Si $0 < x < 1$ alors $0 < x^n \leqslant x < 1$.
     - Si $1 < x$ alors $1 < x \leqslant x^n$.

Capacité 4 ***Comparer avec les fonctions de référence***

1. Soit q un réel tel que $1 < q$. Comparer $1 - \dfrac{1}{q}$, $\left(1 - \dfrac{1}{q}\right)^2$ et $\left(1 - \dfrac{1}{q}\right)^3$.

2. Soit un entier $n \geqslant 1$, comparer $\mathrm{e}^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ et $\mathrm{e}^{-\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$.

2.4 Opérations membre à membre

Propriété 4

Soient a, b, c et d quatre réels.

Si	a	$\leqslant$	b		Si	0	$\leqslant$ a	$\leqslant$	b
et	c	$\leqslant$	d		et	0	$\leqslant$ c	$\leqslant$	d
alors	$a+c$	$\leqslant$	$b+d$		alors	0	$\leqslant$ $a \times c$	$\leqslant$	$b \times d$

Capacité 5 *Comparer membre à membre*

1. Démontrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k+1)}$.

2. Justifier que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

3. À l'aide d'un argument de *somme télescopique*, en déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

4. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} < 1$.

2.5 Étude du sens de variation d'une suite

Définition 2

- Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est **constante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_{n+1} = u_n$.

Méthode

Il existe plusieurs méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n).

☞ Si le terme général de (u_n) est donné par une formule explicite $u_n = f(n)$ et s'il existe un entier naturel p tel que f monotone sur $[p\,; +\infty[$ alors :

  - (u_n) est décroissante à partir du rang p si f décroissante sur $[p\,; +\infty[$.
  - (u_n) est croissante à partir du rang p si f croissante sur $[p\,; +\infty[$.

☞ On peut étudier le **signe de la différence** $u_{n+1} - u_n$ et démontrer qu'il existe un rang p tel que pour tout entier $n \geqslant p$, $u_{n+1} - u_n$ est de signe constant.

  - Si « $\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ » alors (u_n) est décroissante à partir du rang p.
  - Si « $\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ » alors (u_n) est croissante à partir du rang p.

☞ Si (u_n) est de signe positif à partir d'un certain rang, on peut étudier le **rapport de deux termes consécutifs** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

  - Si « $\forall n \geqslant p,\ u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ » alors (u_n) est décroissante à partir du rang p.
  - Si « $\forall n \geqslant p,\ u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ » alors (u_n) est croissante à partir du rang p.

- ☞ On peut utiliser un **raisonnement par récurrence** (voir 8).

Capacité 6 *Choisir une méthode adaptée pour étudier le sens de variation d'une suite*

1. $\boxed{\textbf{Méthode 1}}$: *Etudier le signe de* $u_{n+1} - u_n$

a. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n(1 - 2u_n)$.

- ☞ Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- ☞ Conclure sur le sens de variation de la suite (u_n).

b. Reprendre le même plan d'étude pour étudier le sens de variation de la suite (w_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

2. $\boxed{\textbf{Méthode 2}}$: *Si* (u_n) *à termes strictement positifs, comparer* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *et* 1

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-n}$. On admet que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n > 0$.

- ☞ Soit un entier $n \geqslant 0$, démontrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.
- ☞ En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3. $\boxed{\textbf{Méthode 3}}$: *Si* $u_n = f(n)$, *étudier les variations de* f *sur* $[0\,;+\infty[$

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$, par $u_n = \frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n + 1}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$. On a pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = f(n)$.

- ☞ Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $f'(x)$.
  ATTENTION, on peut dériver la fonction f mais pas la suite (u_n) car celle-ci n'est pas définie sur un intervalle !!!
- ☞ En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$ et le sens de variation de (u_n).

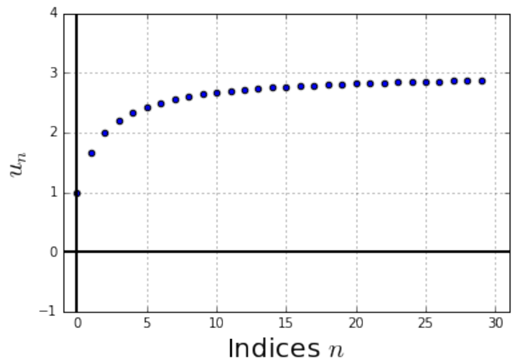
2.6 Suites bornées

Définition 3

- Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier n on ait $u_n \leqslant M$. On dit que M est un **majorant** de (u_n).
- Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier n on ait $u_n \geqslant m$. On dit que M est un **minorant** de (u_n).
- Une suite (u_n) est **bornée** si elle est majorée et minorée c'est-à-dire qu'il existe des réels m et M tels que pour tout entier n on ait $m \leqslant u_n \leqslant M$

Capacité 7 ***Démontrer qu'une suite est bornée***

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_n = \dfrac{3n+2}{n+2}$.



1. On donne ci-contre la représentation graphique des premiers termes de la suite (u_n) dans un repère orthonormal.

   Émettre une conjecture sur un minorant et un majorant possibles de la suite (u_n).

2. Démontrer cette conjecture.

3 Suites arithmétiques et géométriques

3.1 Suites arithmétiques

Les preuves des propriétés ont été établies en classe de première

Définition 4

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est la raison de la suite.

Propriété 5

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + n \times r$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, \quad u_p = u_q + (p-q) \times r$$

Théorème 1

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si et seulement s'il existe deux réels a et r tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a + nr$$

Une suite est arithmétique si et seulement si sa représentation graphique dans un repère est constituée de points alignés.

Propriété 6

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $q \in \mathbb{N}$ tel que $q \geqslant p$ on a :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{q-1} + u_q = (q-p+1) \times \frac{u_p + u_q}{2} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

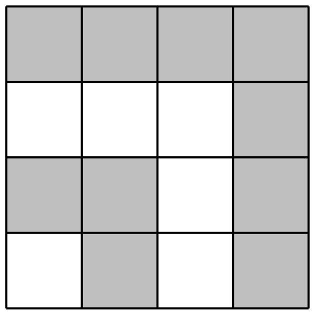
En particulier pour la suite arithmétique telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Capacité 8 ***Étudier une suite arithmétique***

On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ des entiers impairs successifs :

$$u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 5, \ldots$$



1. Justifier que $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite arithmétique.
2. Soit n un entier naturel positif, exprimer u_n en fonction de n.
3. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} u_k = n^2$.

3.2 Suites géométriques

Les preuves des propriétés ont été établies en classe de première

Définition 5

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est la raison de la suite.

Propriété 7

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \quad u_m = u_p \times q^{m-p}$$

Propriété 8

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Plus généralement, Pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geqslant p$ on a :

$$\sum_{k=p}^{m} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{m-1} + u_m = u_p \times \frac{1-q^{m-p+1}}{1-q} = \text{premier terme} \times \frac{1-raison^{\text{nombre de termes}}}{1-raison}$$

En particulier pour la suite géométrique telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n$ avec $q \neq 1$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Capacité 9 ***Étudier une suite géométrique***

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite arithmétique des entiers impairs définie dans l'exemple 9.
On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ par $v_n = \mathrm{e}^{u_n}$.

1. Justifier que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique.
2. Calculer la somme $\sum_{k=1}^{30} v_k$.
3. Soit un entier $n \geqslant 1$, exprimer en fonction de n le produit de termes consécutifs :

$$\prod_{k=1}^{n} v_k = v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_{n-1} \times v_n$$

4 Raisonnement par récurrence

4.1 Principe du raisonnement par récurrence

Exemple 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + 8n + 8$.

1. Calculer u_1 et u_2. $u_1 = u_0 + 8\times 0 + 8 = 9$ et $u_2 = u_1 + 8\times 1 + 8 = 25$
2. Compléter la fonction algorithmique et sa traduction en `Python` ci-dessous afin qu'elles retournent u_n pour un entier $n \geqslant 0$ passé en paramètre.

Algorithme

```
Fonction suiteU(n):
  u ⟵ 1
  Pour k allant de 0 à n-1
    u ⟵ u+8k+8
  Retourne u
```

Python

```
def suiteU(n):
    u = 1
    for k in range(0, n):
        u = u+8*k+8
    return u
```

3. Compléter le tableau d'évolution des variables k et u lorsqu'on exécute l'algorithme pour l'entrée $n = 5$.

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
Variable u	1	9	25	49	81

4. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n. On peut conjecturer que $u_n = (2n+1)^2$

Principe du raisonnement par récurrence

On considère la propriété P_n : " $u_n = (2n+1)^2$ "
La propriété est vraie pour les plus petits entiers : P_0, P_1, P_2 etc... sont vraies. Si on démontre que pour tout entier naturel n fixé on a l'implication $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, alors on pourra construire une chaîne infinie d'implications :

initialisation $P_0 \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow P_n \Rightarrow P_{n+1} \Rightarrow \dots$ à l'infini

hérédité

L'axiome de récurrence va nous permettre d'affirmer qu'il suffit de vérifier :

- ***l'initialisation de la propriété***, c'est-à-dire que P_0 est vraie.
- puis ***l'hérédité de la propriété***, c'est-à-dire que pour tout entier $n \geqslant 0$, si on suppose P_n vraie alors P_{n+1} est vraie aussi.

pour en conclure que P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

4.2 Axiome de récurrence

Axiome *Axiome de récurrence*

Soit une propriété P_n dépendant de l'entier naturel n.

- si P_{n_0} est vraie pour un entier naturel n_0 (***Initialisation***).
- et si pour tout entier $n \geqslant n_0$, l'hypothèse que P_n est vraie implique que P_{n+1} est vraie aussi. (***Hérédité***).

alors la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$.

4.3 Exemple de rédaction d'un raisonnement par récurrence

On va démontrer que l'expression de u_n conjecturée dans l'exemple ~~12~~ 1 est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

- Soit un entier $n \geqslant 0$, notons P_n la propriété « $u_n = (2n+1)^2$ ».

  Démontrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$:

  - $\boxed{\text{Initialisation}}$
    $(2\times 0+1)^2 = 1^2 = 1 = u_1$ donc P_0 est vraie

  - $\boxed{\text{Hérédité}}$ Soit n un entier tel que $n \geqslant 0$, montrons que si P_n est vraie alors P_{n+1} est aussi vraie :

    Par hypothèse de récurrence, on a P_n vraie.
    On en déduit que : $u_n = (2n+1)^2$
    On veut démontrer que P_{n+1} est vraie c'est-à-dire
    que : $u_{n+1} = (2\times(n+1)+1)^2$

    On construit u_{n+1} à partir de la relation de récurrence et de l'hypothèse de récurrence :
    $u_{n+1} = u_n + 8n + 8$ par relation de récurrence
    or $u_n = (2n+1)^2$ par hypothèse de récurrence
    donc $u_{n+1} = 4n^2 + 4n + 1 + 8n + 8 = (2n+3)^2$
    $u_{n+1} = (2(n+1)+1)^2$

    On en déduit que P_{n+1} est aussi vraie.
    Donc pour tout entier $n \geqslant 0$, si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie, la propriété est héréditaire.

  - $\boxed{\text{Conclusion}}$
    La propriété P_n est initialisée pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc d'après l'axiome de récurrence elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

Capacité 10 *Démontrer avec un raisonnement par récurrence*

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 2u_n - 5$.

   a. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 5.

   b. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

c. Quelle propriété pourrait-on démontrer par récurrence pour répondre aux deux questions précédentes ?

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 5 - 2^{n+2}$.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = -1$ et pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = \sqrt{3v_n + 4}$.

a. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{3x+4}$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.

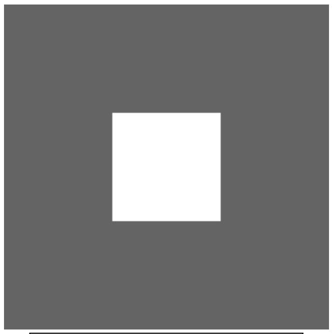
3. Soit (u_n) une suite réelle telle que pour tout entier $n \geqslant 0$ on ait $u_{n+1} = u_n^3$.

a. Démontrer que si pour un entier $n \geqslant 0$, on a $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$ alors on a $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

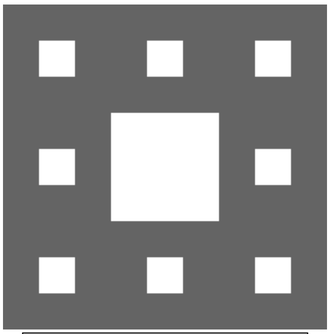
b. Peut-on en déduire que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$?

Suites et fractales : la carpette de Sierpinski

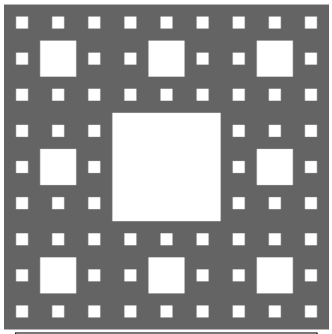
Étape 0 : 0 découpe



Étape 1 : 1 découpe



Étape 2 : 9 découpes



Étape 3 : 73 découpes

Question : Combien de carrés blancs à l'étape 100 ?

Table des matières